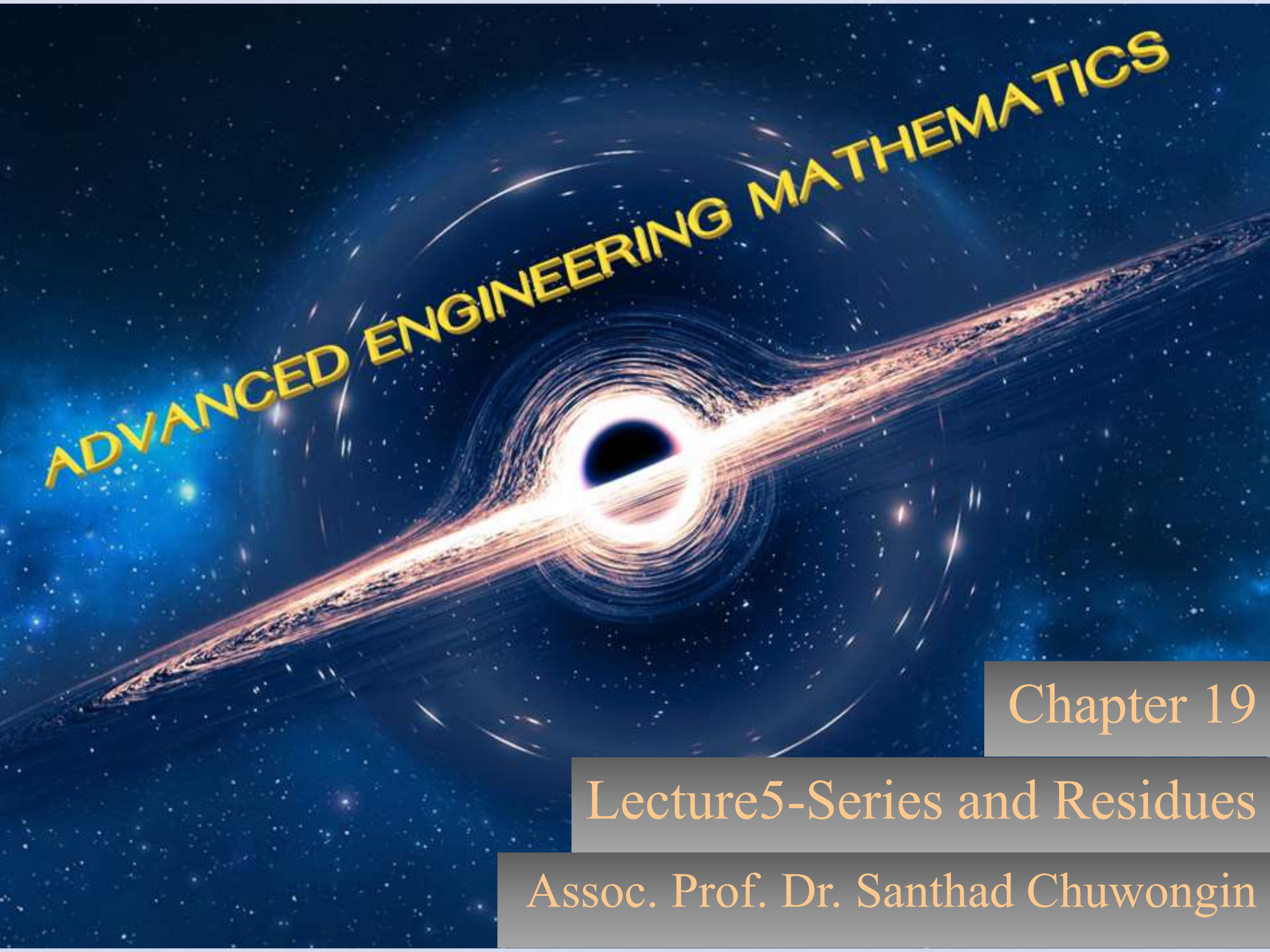


ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

Chapter 19

Lecture5-Series and Residues

Assoc. Prof. Dr. Santhad Chuwongin

Outline

19.1 ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

19.2 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

19.3 อนุกรมลอเรนต์(Laurent Series)

19.4 ซีโรและโพล (Zeros and Poles)

19.5 ส่วนตกค้างและทฤษฎีส่วนตกค้าง(Residues and Residue Theorem)

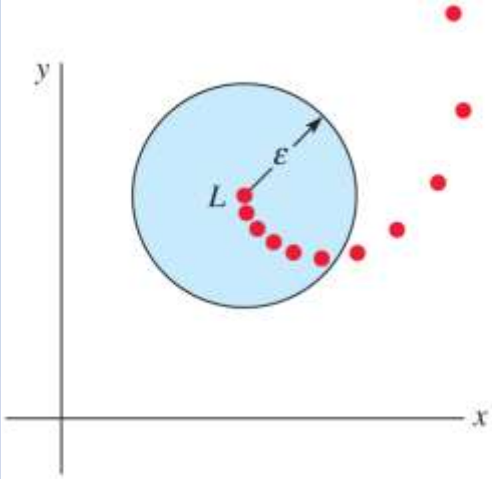
19.6 การประมาณค่าอินทิกรัลจริง (Evaluation of Real Integrals)

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- ลำดับ $\{z_n\}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n=1, 2, 3, . . .,
- ตัวอย่างเช่น ลำดับ$\{\, 1 + \ i^n\}$

$$\begin{array}{ccccc} 1+i, & 0, & 1-i, & 2, & 1+i,\ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n=1, & n=2, & n=3, & n=4, & n=5,\ldots \end{array}$$

- ถ้า $\lim_{n\to\infty} z_n = L$ ดังนั้น ลำดับ $\{z_n\}$ จะลู่เข้า(Convergence)
- $\{z_n\}$ จะลู่เข้า ถ้าทุกค่า **ε** ที่เป็นบวก สามารถหาค่า N ได้ที่ทำให้ $|z_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n > N$

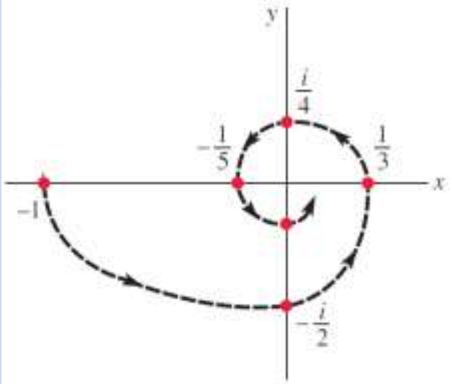


If $\{z_n\}$ converges to L, all but a finite number of terms are in any ε-neighborhood of L

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- **<u>ตัวอย่าง:</u>** ลำดับ $\left\{\frac{i^{n+1}}{n}\right\}$ ลู่เข้าเพราะ $\lim_{n\to\infty} \frac{i^{n+1}}{n} = 0$ ดังจะเห็นได้จาก

$$\frac{i^{n+1}}{n} = -1, -\frac{i}{2}, \frac{1}{3}, \frac{i}{4}, -\frac{1}{5} \text{ เมื่อ } n = 1,2,3,4,5$$



The terms of the sequence spiral toward 0

- ลำดับ $\{z_n\}$ จะลู่เข้าสู่จำนวนเชิงซ้อน L ถ้าและเพียงถ้า $Re(z_n)$ ลู่เข้าสู่ $Re(L)$ และ $Im(z_n)$ ลู่เข้าสู่ $\mathrm{Im}(L)$

- <u>ตัวอย่าง:</u> ลำดับ $\left\{\frac{ni}{n+2i}\right\}$ จะลู่เข้าสู่ i เนื่องจาก $Re(\frac{ni}{n+2i})$ ลู่เข้าสู่ $Re(L) = 0$ และ $Im(z_n)$ ลู่เข้าสู่ $Im(L) = 1$

$$z_n = \frac{ni}{n+2i} = \frac{2n}{n^2+4} + i\,\frac{n^2}{n^2+4} = 0 + i \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- เงื่อนไขสำหรับการลู่ออก (Divergence) และลู่เข้า (Convergence)
  - ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ลู่เข้า แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$
  - ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ แล้ว อนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ลู่ออก
  - อนุกรมอนันต์ (Infinite series) $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ถูกเรียกว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (absolutely convergence) ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ลู่เข้า
    - การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์บอกเป็นนัยว่า “ลู่เข้า”

อนุกรม (Series)

- อนุกรม : อนุกรมอนันต์ของจำนวนเชิงซ้อน

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots = S_\infty$$

- อนุกรมเรขาคณิต: อนุกรมอนันต์ของจำนวนเชิงซ้อน

$$\sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1} = a + az^1 + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots = S_\infty$$

อนุกรม (Series)

$$S_n = a_1 + \cancel{a_1 z^1 + a_1 z^2 + \cdots + a_1 z^{n-1}}$$
$$zS_n = \cancel{a_1 z^1 + a_1 z^2 + \cdots + a_1 z^{n-1}} + a_1 z^n$$

$$S_n = \boxed{a_1} + \boxed{(a_1 + z)} + (a_1 + 2z) + (a_1 + 3z) + \cdots + \boxed{(a_1 + (n-1)z)}$$
$$S_n = \boxed{(a_1 + (n-1)z)} + \boxed{(a_1 + (n-2)z)} + (a_1 + (n-3)z) + \cdots + (a_1 + z) + \boxed{a_1}$$
$$2S_n = \boxed{\{2a_1 + (n-1)z\}} + \boxed{\{2a_1 + (n-1)z\}} + \cdots + \boxed{\{2a_1 + (n-1)z\}}$$

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- การทดสอบอัตราส่วนและรากของจำนวนเชิงซ้อนสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับอนุกรมกำลัง (power series)

Theorem 19.1.4 Ratio Test

Suppose $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ is a series of nonzero complex terms such that

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L. \tag{9}$$

(*i*) If $L < 1$, then the series converges absolutely.
(*ii*) If $L > 1$ or $L = \infty$, then the series diverges.
(*iii*) If $L = 1$, the test is inconclusive.

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- การทดสอบอัตราส่วนและรากของจำนวนเชิงซ้อนสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับอนุกรมกำลัง (power series)

Theorem 19.1.5 Root Test

Suppose $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ is a series of complex terms such that

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L. \tag{10}$$

(*i*) If $L < 1$, then the series converges absolutely.
(*ii*) If $L > 1$ or $L = \infty$, then the series diverges.
(*iii*) If $L = 1$, the test is inconclusive.

- อนุกรมกำลัง อยู่ในรูปดังนี้

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

- คุณสมบัติของอนุกรมกำลัง (Properties of a power series)
  - อนุกรมกำลังแทนฟังก์ชันต่อเนื่อง f ภายในวงกลมของการลู่เข้า $|z - z_0| = R$ โดยที่ $R \neq 0$
  - อนุกรมกำลังถูกรวมเทอมต่อเทอมภายในวงกลมของการลู่เข้า สำหรับทุกๆคอนทัวร์ C ทั้งหมดภายในวงกลม
  - อนุกรมกำลังถูกอนุพันธ์เทอมต่อเทอม ภายในวงกลมของการลู่เข้า
  - อนุกรมกำลังแทนฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในวงกลมของการลู่เข้า

อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

$$f'(x) \;=$$

$$f''(x) \;=$$

$$f'''(x) =$$

$$f''''(x) =$$

$$f(x) =$$

ตัวอย่างTaylor Series : $f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n$

1. $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} =$
2. $\mathrm{e}^{\mathrm{x}} =$
3. $\mathrm{e}^2 =$
4. $\sin(\mathrm{x}) =$
5. $\cos(\mathrm{x}) =$
6. $\sqrt{1+\mathrm{x}} =$

อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมน D และ z_0 เป็น จุดใน D, f จะมีอนุกรมเทย์เลอร์ ดังนี้

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

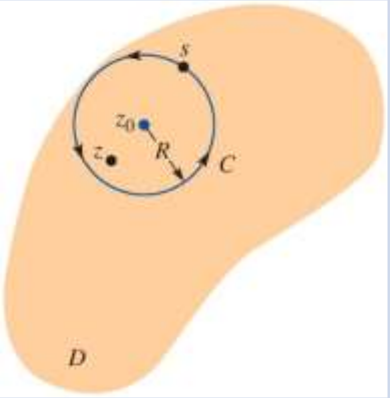


Figure 19.2.1: Circular contour *C* used in proof of Theorem 19.2.4

ใช้ได้สำหรับวงกลมใหญ่สุด C ด้วยจุดศูนย์กลางและรัศมี R ทั้งหมดภายใน C

- อนุกรมเทย์เลอร์ ด้วยจุดศูนย์กลาง $z_0 = 0$ คือ อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$

อนุกรมลอเรนต์(Laurent Series)

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมนรูปวงแหวน D ซึ่งถูกกำหนดโดย $r < |z - z_0| < R$,ดังนั้น f มีอนุกรมลอเรนต์ ดังนี้
  - ใช้ได้สำหรับ $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$
  - z_0 อยู่ภายใน C, ซึ่งทั้งหมดอยู่ใน D
  - ค่าสัมประสิทธิ์ ถูกเขียนได้ดังนี้

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} ds$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

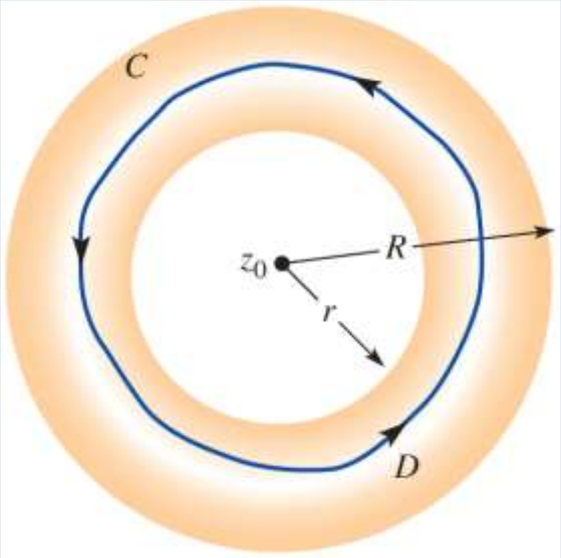


Figure 19.3.1: Contour in Theorem 19.3.1

ซีโรและโพล (Zeros and Poles)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\,(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k$$

- คืออนุกรมลอเรนต์เป็นตัวแทนสำหรับดิสก์เปิดแบบมีรู
  - ส่วนประกอบหลัก คือเทอมที่มีค่ากำลังติดลบของ $z - z_0$
  - ภาวะเอกฐานขจัดได้ (removable singularity) มีส่วนประกอบหลักเป็นซีโร
  - โพลมีส่วนประกอบหลัก เป็นจำนวนจำกัดที่ไม่ใช่เทอมที่เป็นศูนย์
  - ภาวะเอกฐานหลัก (essential singularity) มีส่วนประกอบหลักเป็นเทอมที่ไม่ใช่ศูนย์จำนวนอนันต์

ซีโรและโพล (Zeros and Poles)

- อนุกรมลอเรนต์สำหรับ f เมื่อ $z = z_0$ เป็นภาวะเอกฐานที่เปนเอกเทศ (isolated singularity) ถูกเขียนได้โดย

$z = z_0$	Laurent Series
Removable singularity	$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
Pole of order n	$\dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dfrac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$
Simple pole	$\dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
Essential singularity	$\cdots + \dfrac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$

ซีโรและโพล (Zeros and Poles)

- z_0 คือซีโรของฟังก์ชัน f ถ้า $f(z_0) = 0$
- ฟังก์ชันวิเคราะห์ f มีซีโรลำดับ n ที่ $\mathrm{z} = z_0$ ถ้า

$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, f''(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0$ แต่ $f^{(n)}(z_0) \neq 0$

- สำหรับฟังก์ชัน f และ g ทั้งคู่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $\mathrm{z} = z_0$, f ซีโรลำดับ n ที่ $\mathrm{z} = z_0$ และ $g(z_0) \neq 0$ ฟังก์ชัน $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ มีโพลลำดับ n ที่ $\mathrm{z} = z_0$
  - คุณสมบัตินี้สามารถหาโพลโดยวิธีการตรวจสอบ

ส่วนตกค้างและทฤษฎีส่วนตกค้าง (Residues and Residue Theorem)

- ค่าสัมประสิทธิ์ a_{-1} ในอนุกรมลอเรนต์ถูกเรียกว่า ส่วนตกค้าง (residue) ของ f ที่ภาวะเอกฐานที่เปนเอกเทศ a_0

$$a_{-1} = Res(f(z), z_0)$$

  – ที่โพลแบบง่าย,

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z)$$

  – ที่โพลลำดับ n,

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}(z - z_0)^n f(z)}{dz^{n-1}}$$

ส่วนตกค้างและทฤษฎีส่วนตกค้าง (Residues and Residue Theorem)

- ในบางกรณี, เราสามารถประเมินค่าอินทิกรัลเชิงซ้อนโดยการรวมส่วนตกค้างที่ภาวะเอกฐานที่เปนเอกเทศของ f ภายในคอนทัวร์ปิด C

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right)$$

การประมาณค่าอินทิกรัลจริง
(Evaluation of Real Integrals)

- พฤติกรรมของอินทิกรัล โดยที่ $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, ดีกรีของ $P(z)$ คือ n และ C_R คือ คอนทัวร์ครึ่งวงกลม $z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$
  - สำหรับดีกรีของ $Q(z)$ ของ $m \geq n + 2$ และ $R \longrightarrow \infty$

$$\oint_C f(z)dz \longrightarrow 0$$

  - สำหรับดีกรีของ $Q(z)$ ของ $m \geq n + 1$ และ $R \longrightarrow \infty$

$$\oint_C (\frac{P(z)}{Q(z)})e^{i\alpha z}dz \longrightarrow 0$$

สำหรับ f ที่มีโพลแบบง่าย $\mathrm{z} = c$ อยู่บนแกนจริงของ C_R ถูกกำหนดโดย

$$z = c + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_R} f(z)\, dz = \pi i \, Res(f(z), c)$$