ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

Chapter 18

Lecture4-Integration in the Complex Plane

Assoc. Prof. Dr. Santhad Chuwongin

Outline

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ สามารถหาค่าได้ที่ทุกจุดบนเส้นโค้งเรียบ C ซึ่งคือ $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ a \leq t \leq b$
- แบ่ง C เป็น n ส่วนดังนี้ $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ บนช่วง $[a, b]$
- จุดบน C คือ $z_0 = x_0 + iy_0 = x(t_0) + iy(t_0), \dots, z_n = x_n + iy_n = x(t_n) + iy(t_n)$ โดยให้ $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1,2, \dots, n$
- ให้ $||P||$ เป็นนอร์มของส่วนซึ่งมีค่ามากที่สุดของ $|\Delta z_k|$
- เลือกจุดตัวอย่าง $z_k{}^* = x_k{}^* + iy_k{}^*$ บนแต่ละส่วน(จุดแดง)
- หาผลรวม

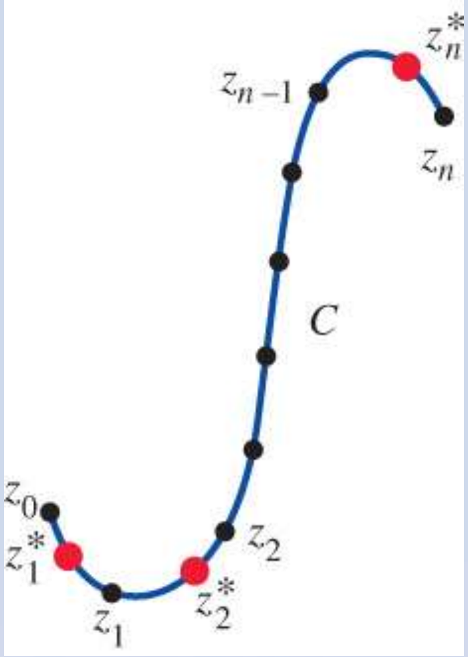
$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k{}^*)\,\Delta z_k$$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- อินทิกรัลของ $f(z)$ บนเส้นโค้งเรียบต่อเนื่อง C (contour or path) จะถูกเรียกว่า คอนทัวร์อินทิกรัลหรือคอมเพล็กซ์อินทิกรัล

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k{}^*)\,\Delta z_k$$



C ถูกกำหนดโดย $x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$

- คอนทัวร์อินทิกรัล จะมีค่าเท่ากับ

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)\,z'(t)dt$$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- คุณสมบัติของคอนทัวร์อินทิกรัล เปรียบเทียบได้กับคุณสมบัติของไลน์อินทิกรัล หรืออินทิกรัลตามเส้น

Theorem 18.1.2 Properties of Contour Integrals

Suppose f and g are continuous in a domain D and C is a smooth curve lying entirely in D. Then

(i) $\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$, k a constant

(ii) $\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

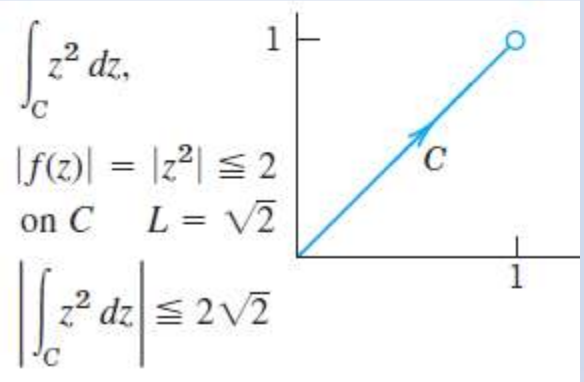
(iii) $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$, where C is the union of the smooth curves C_1 and C_2

(iv) $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$, where $-C$ denotes the curve having the opposite orientation of C.

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- ถ้า f ต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบ C และถ้า $|f(z)| \leq M$ สำหรับทุกจุด z บน C, ดังนั้น $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq ML$ โดยที่ L เป็นความยาวของ C
  - ทฤษฎีขอบเขต (Bounding Theorem) หรือบางครั้งถูกเรียกว่า "*ML-inequality*"
  - มีประโยชน์ในเรื่องทฤษฎีการอินทิเกรทจำนวนเชิงซ้อน



© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- จงหาขอบเขตบนของโจทย์ โดยใช้ *ML-inequality* โดยที่ C คือวงกลม $|z| = 4$

$$\left| \oint_C \frac{e^z}{z+1} dz \right| \leq \frac{e^4 8\pi}{3} \approx 457$$

$$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = |e^x(\cos(y) + isin(y))| = |e^x| = e^4$$

$$|z+1| \geq |z| - 1 = 4 - 1 = 3$$

L=2πr=8π

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- จงหาขอบเขตบนของโจทย์ โดยใช้ *ML-inequality* โดยที่ C คือวงกลม $|z| = 4$

$$\left| \oint_C \frac{e^z}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{8\pi|e^z|}{|z|^2-1} = \frac{e^4 8\pi}{15} \approx 91.5$$

$$\left|\frac{e^z}{z^2+1}\right| \leq \left|\frac{e^z}{|z^2|-1}\right| = \left|\frac{e^4}{15}\right|$$

L=2πr=8π

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- จงหาขอบเขตบนของโจทย์ โดยใช้ *ML-inequality* โดยที่ C คือ quarter ของวงกลม

$|z| = 4$ จาก $z = 4i$ ถึง $z = 4$

$$\left| \oint_C \frac{1}{z^3} dz \right| \leq \frac{2\pi}{|4|^3} = \frac{\pi}{32}$$

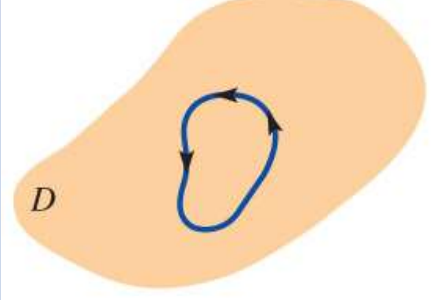
$$\left| \frac{1}{z^3} \right| = \frac{1}{|z|^3} = \frac{1}{64}$$

$$L = \frac{2\pi r}{4} = 2\pi$$

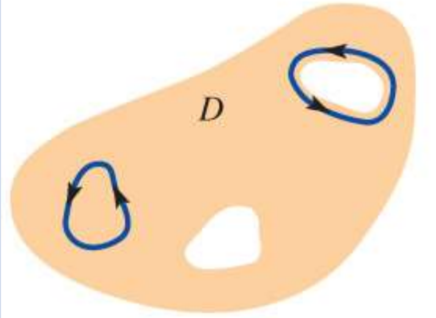
© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

- ประเภทโดเมน (*simply, multiply connected*)
- โดเมนจะเป็น *simply connected* ถ้าทุกๆ simple closed contour C ทั้งหมดที่อยู่ใน โดเมนนี้ปิดล้อมเพียงจุด D (หรือ โดเมนไม่มีรู)
- โดเมนที่ไม่เป็น *simply connected* จะเป็น *multiply connected*
  - โดเมนที่มี 1 “hole” จะเป็น *doubly connected*
  - โดเมนที่มี 2 “holes” จะเป็น *triply connected*



(a) Simply connected domain



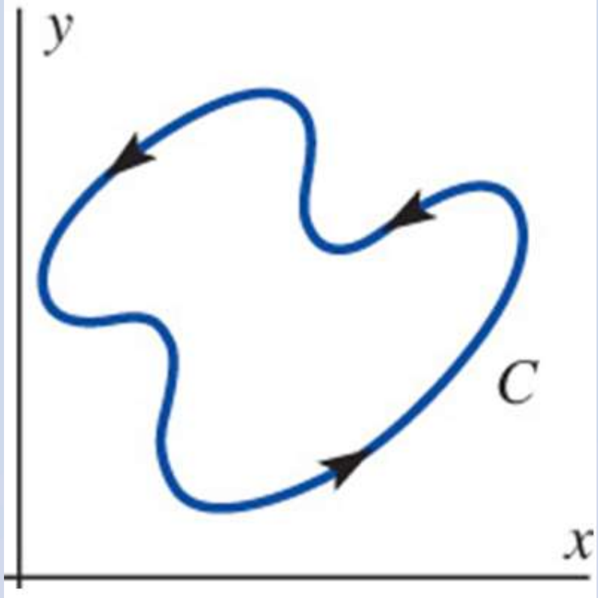
(b) Multiply connected domain

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

- ตามที่ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาตกล่าวไว้ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic) ในโดเมน D ที่เป็นแบบ *simply connected* ค่าของคอนทัวร์อินทิกรัล $\oint_C f(z)dz$ มีค่าเท่ากันสำหรับเส้นโค้งปิด C ซึ่งอยู่ภายใน D ทั้งหมด

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ที่ทุกๆจุดที่อยู่ภายในหรือบนคอนทัวร์ C, แล้ว $\oint_C f(z)\mathrm{dz} = 0$



© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

- การพิสูจน์ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat theorem) จะใช้ทฤษฎีบทของกรีน (Green's theorem) $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$ และสมการของโคชี-รีมันน์ (Cauchy-Riemann equations)

- $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ และ $z(x,y) = x + iy$

- $\oint_C f(z)dz = \oint_C [u(x,y) + iv(x,y)][dx + idy] = \oint_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \oint_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA$

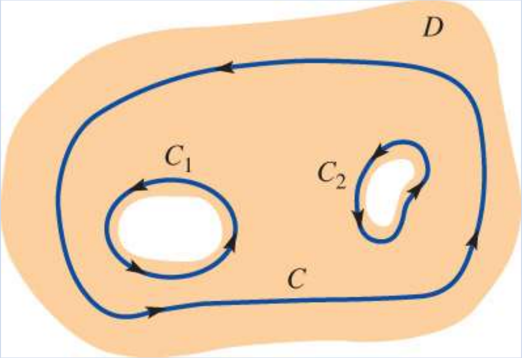
- ถ้า f เป็น analytic, ดังนั้น $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ และ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ทำให้ $\oint_C f(z)dz = 0$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

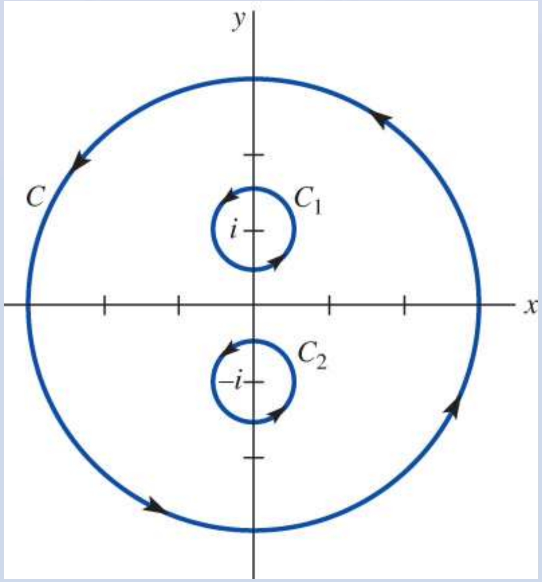
- ในโดเมนที่เป็นแบบ *multiply connected*, $\oint_C \ f(z)\,dz \neq 0$
  - สมมุติว่า $C, C_1, \ldots, C_n$ เป็นเส้นโค้งแบบ *simple closed* ที่มีทิศทางเป็นบวก $C_1, C_2, \ldots, C_n$ อยู่ใน C
  - แต่บริเวณที่อยู่ภายในของแต่ละ $C_k, k = 1,2,\ldots,n$ จะไม่มีจุดร่วมกัน
  - f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนแต่ละคอนทัวร์และที่แต่ละจุดภายใน C แต่ไม่ใช่ภายนอก $C_k, k = 1,2,\ldots,n$

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$



© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)



$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

จงหาค่า $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$ โดยที่ C คือวงกลม $|z| = 3$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1/2i}{z-i} - \frac{1/2i}{z+i}$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_{C_1} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2i}(2\pi i - 0 + 0 - 2\pi i) = 0$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A+iB}{z-i} + \frac{C+iD}{z+i}$$

$$= \frac{Az + iBz + iA - B + Cz + iDz - iC + D}{z^2+1}$$

ดังนั้น

$$A + C = 0$$
$$D + B = 0$$
$$A - C = 0$$
$$D - B = 1$$

ทำให้ $A = C = 0, D = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{z^2+1} = \frac{-\frac{i}{2}}{z-i} + \frac{\frac{i}{2}}{z+i} = \frac{\frac{1}{2i}}{z-i} + \frac{-\frac{1}{2i}}{z+i}$

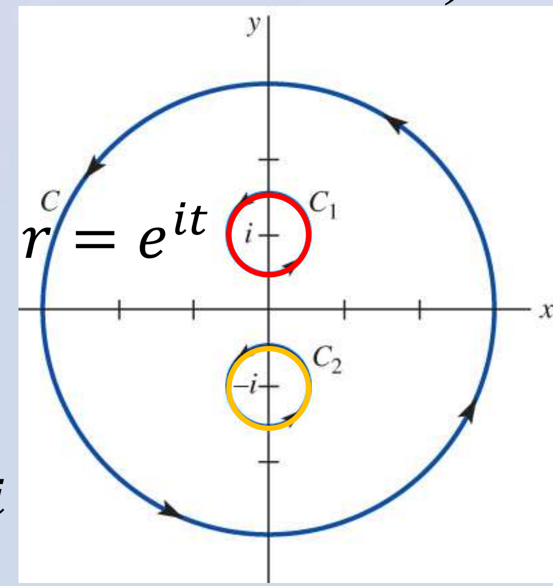
© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

สมมุติรัศมีวงกลม(มีค่าเท่าใดก็ได้) $= r = e^{it}$

$z - i = e^{it}$ หรือ $z = i + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

สมมุติรัศมี $= r = e^{it}$



$dz = ie^{it}dt$

$$\oint_{C1} \frac{dz}{z-i} = \oint_{C1} \frac{dz}{z-i} = \oint_{0}^{2\pi} \frac{dz}{z-i} = \oint_{0}^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = i\oint_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$z + i = e^{it}$ หรือ $z = e^{it} - i, 0 \leq t \leq 2\pi$

$dz = ie^{it}dt$

$$\oint_{C2} \frac{dz}{z+i} = \oint_{C2} \frac{dz}{z+i} = \oint_{0}^{2\pi} \frac{dz}{z+i} = \oint_{0}^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = i\oint_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i$$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

ความเป็นอิสระของเส้นทาง (Independence of the Path)

- คอนทัวร์อินทิกรัล $\int_C f(z)dz$ เป็นอิสระของเส้นทาง ถ้าค่าของมันมีค่าเท่ากันในทุกเส้นทางคงที่ C ด้วยจุดเริ่มต้น z_0 และจุดสิ้นสุด z_1 ใน D

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน *simply connected domain* D, ดังนั้น $\int_C f(z)dz$ เป็นอิสระของเส้นทาง C

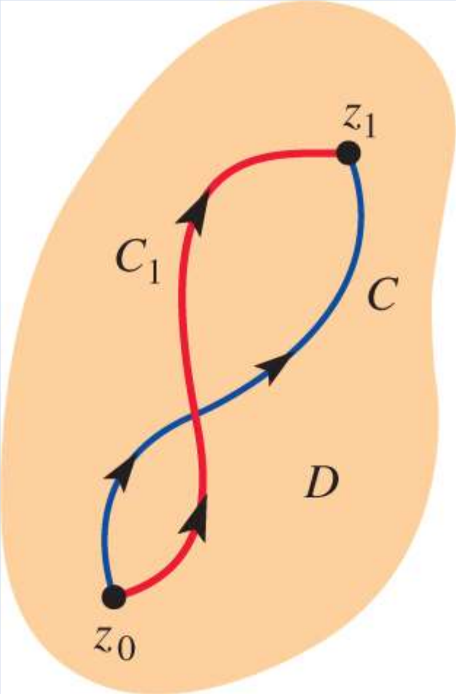


Figure 18.3.1: If *f* is analytic in *D*, integrals on *C* and C_1 are equal

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

ความเป็นอิสระของเส้นทาง (Independence of the Path)

- ถ้ามีฟังก์ชัน F ที่สามารถมีได้ โดยที่ $F'(z) = f(z)$ ดังนั้น, F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f (*anti-derivative*)
- ตัวอย่าง , $F(z) = -\cos z$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(z) = \sin z$ เพราะว่า $F'(z) = \sin z$
- ถ้า f ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในโดเมน D และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ในโดเมน D , ดังนั้น สำหรับทุกคอนทัวร์ C ซึ่งมีจุดเริ่มต้น z_0 และจุดสิ้นสุด z_1 ใน D

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy’s Integral Formulas)

- ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต มีความสำคัญหลายอย่าง
  - ค่าของฟังก์ชันวิเคราะห์ f ที่จุด z_0 ใดๆในโดเมนแบบ ***simply connected*** สามารถถูกแทนด้วยคอนทัวร์อินทิกรัล

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

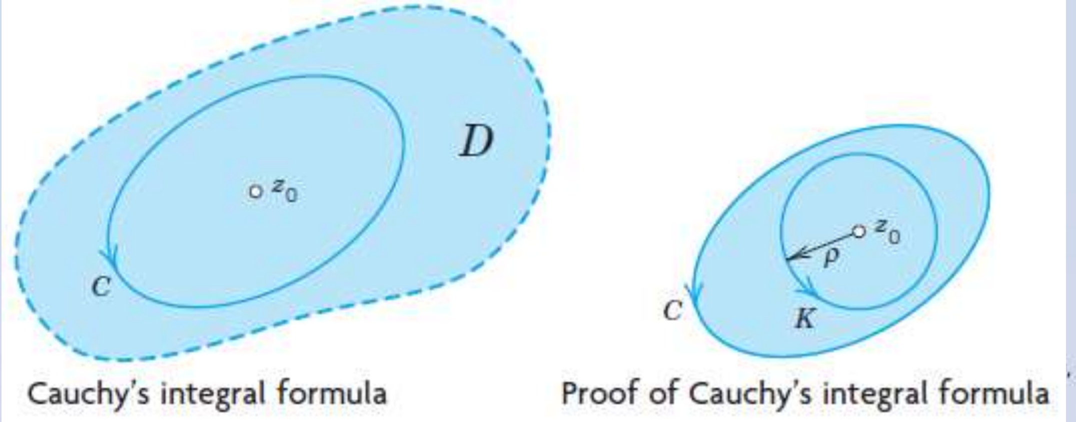
  - ฟังก์ชันวิเคราะห์ f ในโดเมนแบบ *simply connected* สามารถหาอนุพันธ์ทุกลำดับ $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy's Integral Formulas)

- ตามที่สูตรโคชีอินทิกรัลกล่าวไว้ สำหรับฟังก์ชันวิเคราะห์ f ในโดเมน D แบบ *simply connected*, ด้วย C เป็นคอนทัวร์แบบ *simple closed* อยู่ใน D และจุด z_0 ใดๆที่อยู่ภายใน C ดังแสดงในรูปด้านล่าง

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$



, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy's Integral Formulas)

$$\oint_C \frac{z^2-4z+4}{z+i}dz = ?$$ โดยที่ C คือวงกลม $|z| = 2$

$$\oint_C \frac{z^2-4z+4}{z+i}dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i\big((-i)^2+4i+4\big) = 2\pi(-4+3i)$$

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9}dz = ?$$ โดยที่ C คือวงกลม $|z-2i| = 4$

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9}dz = \oint_C \frac{z}{(z+3i)(z-3i)}dz = \oint_C \frac{z/(z+3i)}{z-3i}dz$$

$$= 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{3i}{6i} = \pi i$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy’s Integral Formulas)

$\oint_C \dfrac{z+1}{z^4+4z^3}dz = ?$ โดยที่ C คือวงกลม$|z| = 1$

$$= \oint_C \frac{z+1}{z^3(z+4)}dz = \oint_C \frac{(z+1)/(z+4)}{z^3}dz$$

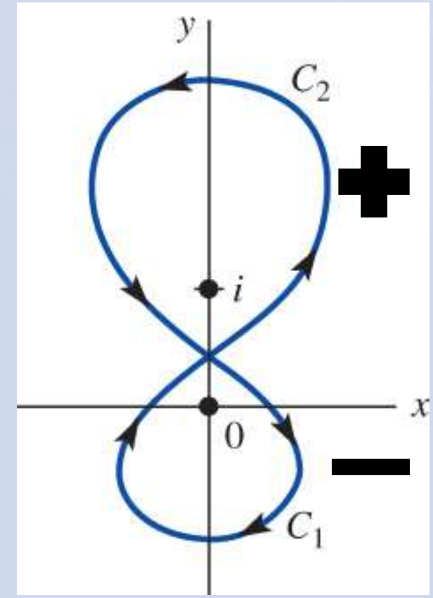
$$= \frac{2\pi i}{2!}f''(0) = \frac{2\pi i}{2!}\left(-\frac{6}{(0+4)^3}\right)$$

$$= -\frac{3\pi i}{32}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy’s Integral Formulas)



$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = ?$$ โดยที่ C คือ

$$= \oint_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{(z^3+3)/(z-i)^2}{z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{(z^3+3)/z}{(z-i)^2}\,dz$$

$$= (2\pi i \times 3) + \frac{2\pi i}{1!} f'(i)$$

$$= 6\pi i + 2\pi i(2i - 3/i^2)$$

$$= 6\pi i - 4\pi + 6\pi i$$

$$= 12\pi i - 4\pi$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy's Integral Formulas)

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + 2\pi i f(z_0)$$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ z_0 จะทำให้ $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ แต่เล็กมากๆ

และ $|z-z_0| < \delta$ สำหรับ $\delta > 0$ และถ้าเราเลือก C_1 ให้เป็น $|z-z_0| = \frac{\delta}{2}$ ดังนั้น ใช้ *ML*-inequality

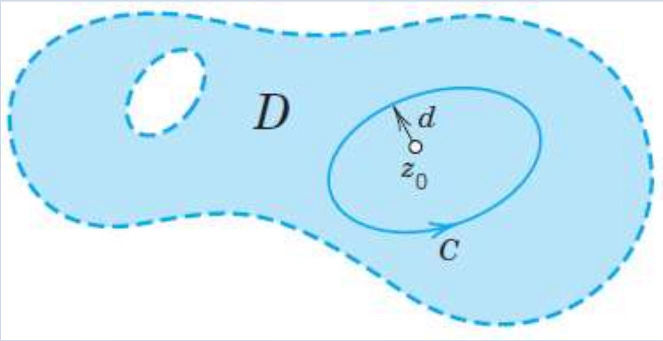
$$\left|\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}2\pi\frac{\delta}{2} = 2\pi\varepsilon = 0$$ เนื่องจาก ε เล็กมากๆ

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

สูตรโคชีอินทิกรัลสำหรับอนุพันธ์
(Cauchy's Integral Formulas for Derivatives)

- ตามที่สูตรโคชีอินทิกรัลกล่าวไว้เกี่ยวกับอนุพันธ์, สำหรับฟังก์ชันวิเคราะห์ f ในโดเมน D แบบ *simply connected* ซึ่งมี C เป็นคอนทัวร์แบบ *simple closed* ที่อยู่ภายใน D และ z_0 เป็นจุดใดๆที่อยู่ภายใน C อนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์ f ที่จุด z_0 จะเท่ากับ

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$



© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy's Integral Formulas)

- ถ้าเรามีคอนทัวร์ C เป็นวงกลม $|z - z_0| = \mathrm{r}$ ดังนั้น,มันเป็นไปตามสูตรโคชีอินทิกรัลสำหรับอนุพันธ์ และ *ML-inequality* ดังนั้น

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!\,M}{r^n}$$

โดยที่ M คือจำนวนจริง ซึ่ง $|f(z)| \le M$ สำหรับทุกจุดบน C ผลจากสมการนี้จะถูกเรียกว่า "Cauchy's inequality" ซึ่งจะถูกใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทของลิววิว (Liouville's Theorem) (The only bounded entire functions are constants)

© Sharpshot/Dreamstime.com Copyright © 2017 by Jones & Bartlett Learning, LLC an Ascend Learning Company
www.jblearning.com