ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

Chapter 17

Lecture3-Complex Analysis

Assoc. Prof. Dr. Santhad Chuwongin

OUTLINE

17.1 จำนวนเชิงซ้อน (COMPLEX NUMBERS)

17.2 ยกกำลังและราก (POWERS AND ROOTS)

17.3 เซตในระนาบเชิงซ้อน (SETS IN THE COMPLEX PLANE)

17.4 ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE)

17.5 สมการโคชี-รีมันน์(CAUCHY–RIEMANN EQUATIONS)

17.6 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม (EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS)

17.7 ฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค (TRIGONOMETRIC AND HYPERBOLIC FUNCTIONS)

17.8 อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค (INVERSE TRIGONOMETRIC AND HYPERBOLIC FUNCTIONS)

จำนวนเชิงซ้อน (COMPLEX NUMBERS)

- จำนวนเชิงซ้อน คือจำนวนใดๆที่อยู่ในรูป $z = x + iy$ โดยที่ $x, \ y$ คือจำนวนจริงและ i คือจำนวนจินตภาพ $= \sqrt{-\mathbf{1}}$
  - x คือส่วนจริง หรือ $Re(z)$
  - y คือส่วนจินตภาพ หรือ $Im(z)$
  - จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนจะเท่ากัน ถ้าทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพเท่ากัน

จำนวนเชิงซ้อน (COMPLEX NUMBERS)

- การดำเนินการเกี่ยวกับเลขคณิต (ARITHMETIC OPERATIONS) ที่ถูกกระทำกับจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$
  - การบวก: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
  - การลบ: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
  - การคูณ: $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)$
  - การหาร: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2} + i\left(\frac{y_1x_2-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}\right)$
- โมดูลัส หรือค่าสัมบูรณ์ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

จำนวนเชิงซ้อน (COMPLEX NUMBERS)

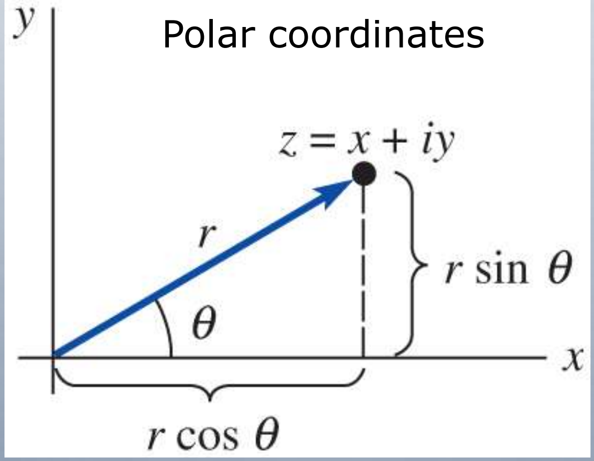
- กฎเหล่านี้ใช้ได้กับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2
  - การสลับที่: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

    $z_1 z_2 = z_2 z_1$
  - การเปลี่ยนหมู่: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

    $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
  - การแจกแจง : $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

ยกกำลังและราก (POWERS AND ROOTS)

- จำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ สามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูป $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ในพิกัดเชิงขั้ว (r, θ)
  - r คือค่าโมดูลัสของ z
  - θ คือค่าอากิวเมนต์ของ z ($\arg z$)



ยกกำลังและราก (POWERS AND ROOTS)

- จำนวนเชิงซ้อนยกกำลังจำนวนเต็มถูกแสดงได้โดย

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

- การคูณและการหารในรูปเชิงขั้ว

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

- จากสมการด้านบน ได้ว่า

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\text{ARG}(z_1 z_2) = \text{ARG}(z_1) + \text{ARG}(z_2)$$

$$\text{ARG}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{ARG}(z_1) - \text{ARG}(z_2)$$

ยกกำลังและราก (POWERS AND ROOTS)

- สูตรของเดอมัวร์ (DEMOIVRE'S FORMULA) มีประโยชน์ในการหาเอกลักษณ์ตรีโกณมิติบางอย่าง
  - เมื่อ $z = r(cos\ \theta + isin\ \theta)$,สูตรของเดอมัวร์กล่าวว่า

$$(cos\ \theta + isin\ \theta)^n = (cos\ n\theta + isin\ n\theta)$$

- รากของจำนวนเชิงซ้อนมีค่าเท่ากับ

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

  - เมื่อ $k = 0,1,2, \dots, n-1$ คือจำนวนค่ารากที่ *N*

ยกกำลังและราก (*POWERS AND ROOTS*)

EX. จงหา $\sqrt{1+i}$

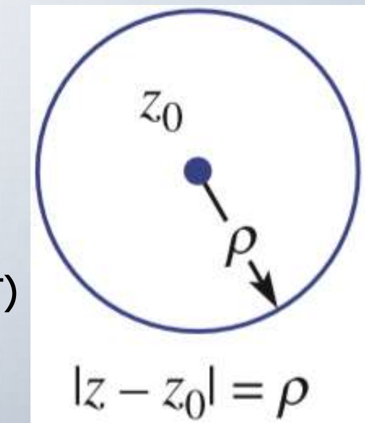
$$W_0 = 2^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{45°}{2}\right) + i\sin\left(\frac{45°}{2}\right)\right] = 1.0987 + i0.4551$$

$$W_1 = 2^{\frac{1}{4}}[\cos(202.5°) + i\sin(202.5°)] = -1.0987 - i0.4551$$

เซตในระนาบเชิงซ้อน (SETS IN THE COMPLEX PLANE)

- สมมุติให้ $z_0 = x_0 + iy_0$ เนื่องจาก $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ คือระยะทางระหว่างจุด $z = x + iy$ และ $z_0 = x_0 + iy_0$ ดังนั้น จุด $z = x + iy$ จะต้องเป็นไปตามสมการ

$$|z - z_0| = \rho \quad ;\rho > 0$$



วงกลม รัศมี ρ

- หากทุกจุด Z ในเซต S เป็นจุดภายใน แสดงว่า S เป็นเซตเปิด (OPEN SET) ดังรูปด้านล่าง

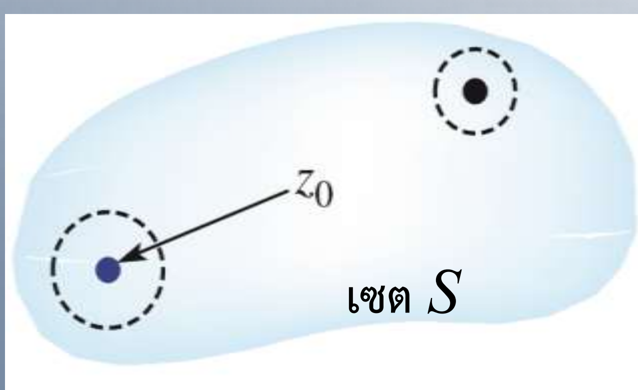


FIGURE 17.3.2 Open set

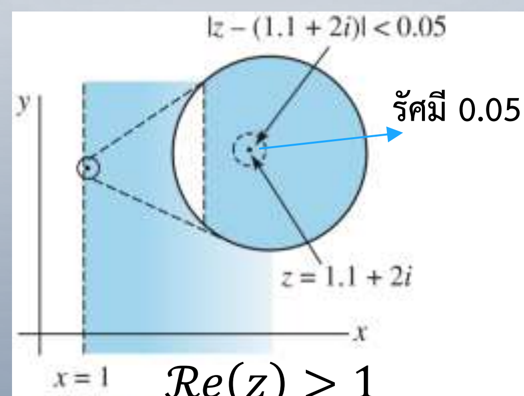


FIGURE 17.3.3 Open set magnified view of a point near $x = 1$

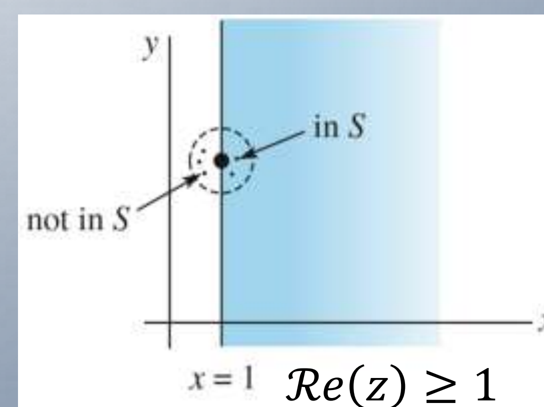


FIGURE 17.3.4 Set S is not open

เซตในระนาบเชิงซ้อน (SETS IN THE COMPLEX PLANE)

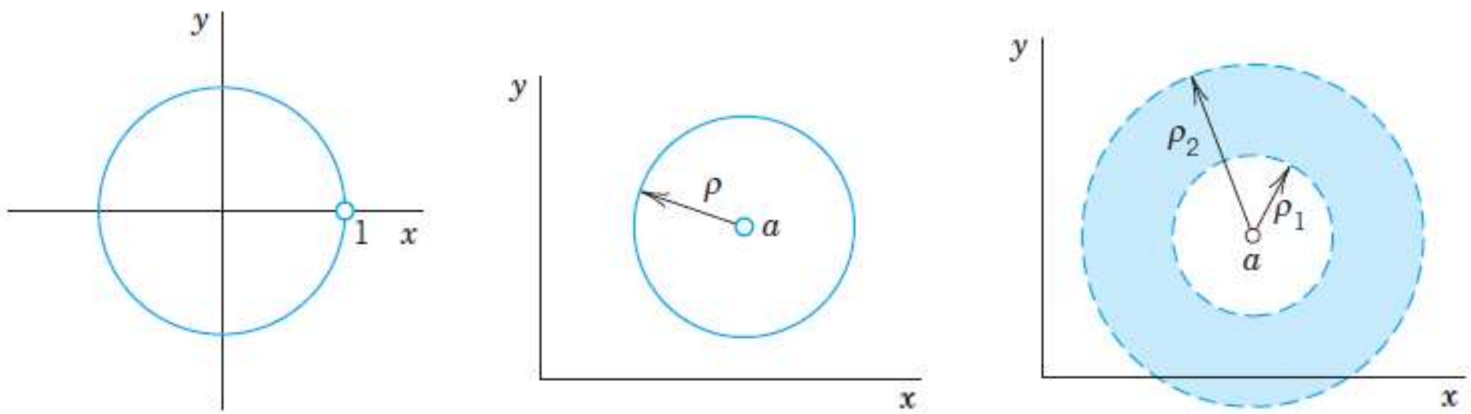


Fig. 330. Unit circle

Fig. 331. Circle in the complex plane

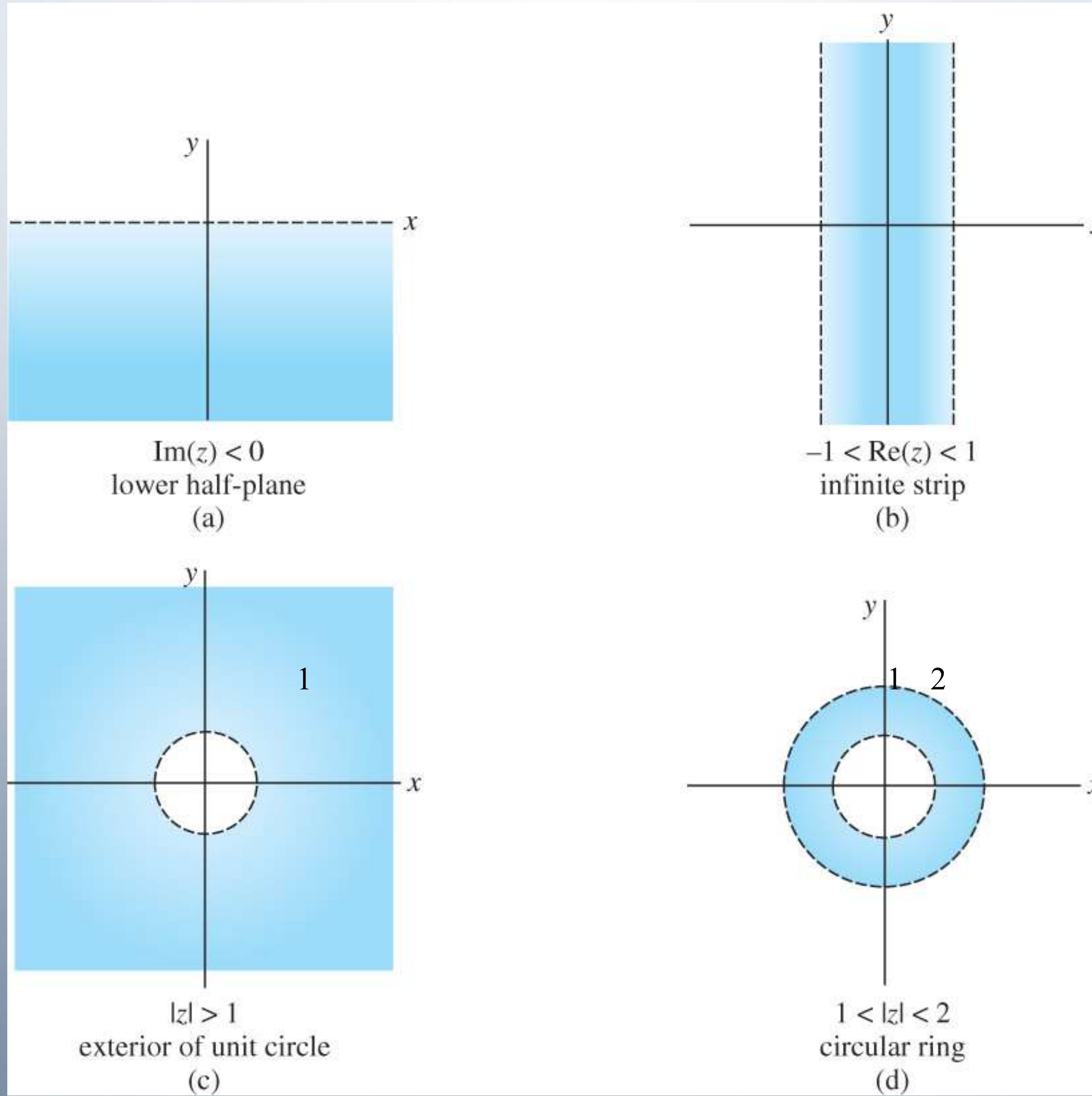
Fig. 332. Annulus in the complex plane

$|z| = 1$

$|z - a| = \rho$

$\rho_1 < |z - a| < \rho_2$

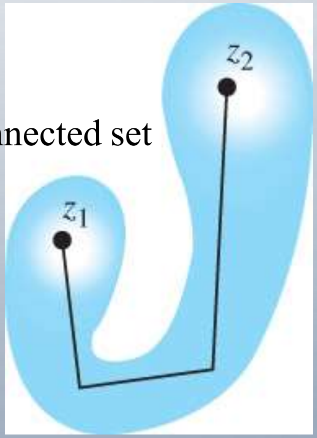
ตัวอย่างของเซตเปิด (*EXAMPLES OF OPEN SETS*)



เซตในระนาบเชิงซ้อน (SETS IN THE COMPLEX PLANE)

- หากจุดคู่ใด ๆ z_1 และ z_2 ในเซตเปิด S สามารถเชื่อมต่อกันได้ด้วยเส้นหลายเหลี่ยมทั้งหมดที่อยู่ภายในเซตนั้น โดยเซตเปิด S ถูกเรียกว่า *"Connected"*
- *Open Connected Set* จะถูกเรียกว่า"โดเมน (*Domain*)"

Connected set



ฟังก์ชันของตัวแปรจริง(FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE)

<u>ตัวอย่างเพื่อความเข้าใจเรื่องฟังก์ชันของตัวแปร</u>

- สมมุติว่า เซต A คือเซตของจำนวนจริง โดย $3 \le x < \infty$ และฟังก์ชันที่กำหนดให้คือ $f(x) = \sqrt{x-3}$ ดังนั้น $f(3) = 0, f(4) = 1, f(5) = \sqrt{2}$ เป็นต้น
- เรนจ์ของ f คือเซต $0 \le y < \infty$
- และเนื่องจาก A คือเซทของจำนวนจริง ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่า "f คือ ฟังก์ชันของตัวแปรจริง x"

ฟังก์ชันของตัวแปรจริง(REAL FUNCTIONS)

- ฟังก์ชัน f จากเซต A ไปยังเซต B คือความสัมพันธ์ที่กำหนดให้แต่ละสมาชิกใน A มีค่าผลลัพธ์เพียงค่าเดียวใน B เท่านั้น
- ถ้าหาก b เป็นสมาชิกในเซต B ที่ถูกกำหนดให้กับสมาชิก a ในเซต A โดยฟังก์ชัน f
- เราจะกล่าวว่า b เป็น IMAGE ของ a และเขียนเป็น $b=f(a)$
- เซต A เรียกว่าโดเมน (DOMAIN) ของฟังก์ชัน f และเซตของ IMAGE b ทั้งหมดใน B เรียกว่า RANGE ของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเชิงซ้อน (COMPLEX FUNCTIONS)

- เมื่อโดเมน A ของฟังก์ชันเป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน z เราจะเรียกฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนนั่นว่า "ฟังก์ชันเชิงซ้อน"
- ค่า IMAGE $\boldsymbol{w}$ ของ $\boldsymbol{z}$ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่ในรูป $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{iv}$ นั่นคือ $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ โดยที่ u และ v คือส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ w ตามลำดับ
- ตัวอย่างบางส่วนของฟังก์ชันเชิงซ้อน ได้แก่ $f(z) = z^2 - 4z$; $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ โดยที่ $z \neq \pm i$ เป็นต้น

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(COMPLEX FUNCTIONS)

Function of a Complex Variable

Let $w = f(z) = z^2 + 3z$. Find u and v and calculate the value of f at $z = 1 + 3i$.

Solution. $u = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 3x$ and $v = 2xy + 3y$. Also,

$$f(1 + 3i) = (1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i.$$

This shows that $u(1, 3) = -5$ and $v(1, 3) = 15$. Check this by using the expressions for u and v.

Function of a Complex Variable

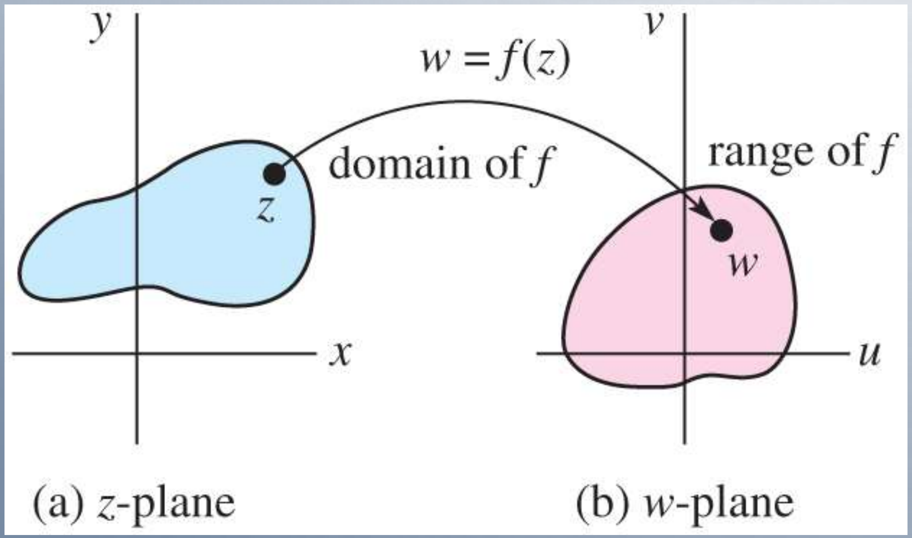
Let $w = f(z) = 2iz + 6\bar{z}$. Find u and v and the value of f at $z = \frac{1}{2} + 4i$.

Solution. $f(z) = 2i(x + iy) + 6(x - iy)$ gives $u(x, y) = 6x - 2y$ and $v(x, y) = 2x - 6y$. Also,

$$f(\tfrac{1}{2} + 4i) = 2i(\tfrac{1}{2} + 4i) + 6(\tfrac{1}{2} - 4i) = i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i.$$

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(COMPLEX FUNCTIONS)

- เราไม่สามารถวาดกราฟของฟังก์ชันเชิงซ้อน $w = f(z)$ ได้เนื่องจากการวาดกราฟจำเป็นต้องใช้แกน 4 แกนในระบบพิกัด 4มิติ $(x, y, u$ และ $v)$
- แม้ว่าเราจะไม่สามารถวาดกราฟของฟังก์ชันเชิงซ้อน $\boldsymbol{w}$=$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ ได้ แต่เราสามารถตีความฟังก์ชันนี้เป็น การ MAPPING จากระนาบ $\boldsymbol{z}$-PLANE ไปยังระนาบ $\boldsymbol{w}$-PLANE ได้ดังรูป



Mapping from *z*-plane to *w*-plane

ตัวอย่าง จงหาค่า $u(x, y), v(x, y)$ เมื่อ

$$f(z) = z^2 - 4z$$

$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 - 4(x + iy)$$
$$= x^2 + 2ixy - y^2 - 4x - 4iy$$
$$= (x^2 - y^2 - 4x) + i(2xy - 4y)$$
$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 4x$$
$$v(x, y) = 2xy - 4y$$

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(COMPLEX FUNCTIONS)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาภาพ (IMAGE) ของเส้น $Re(z) = 1$ ดังรูปด้านล่างด้วยการแมปปิ้ง $f(z) = z^2$

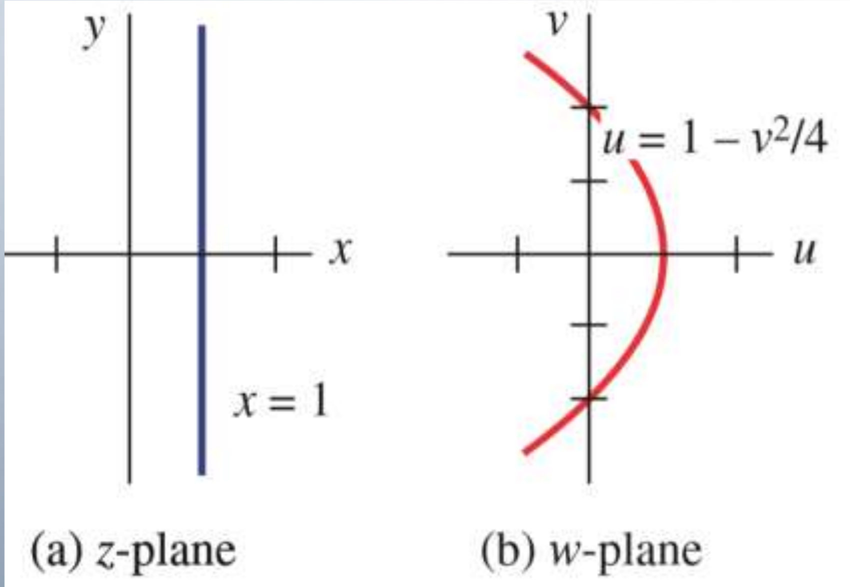


Image of $x = 1$ is a parabola

$f(z) = f(x+iy) = z^2 = (x+iy)^2$

$= x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

$u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$

จากรูปด้านซ้ายมือ เส้นตรง $x = 1$ ดังนั้น

$u(x,y) = 1 - y^2$, $v(x,y) = 2y$

หรือ

$$u = 1 - \frac{v^2}{4}$$

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(COMPLEX FUNCTIONS)

- ถ้าลิมิตของ f ที่ Z เข้าใกล้ z_0 คือ $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = L$ เมื่อ $\varepsilon > 0$ จะมี $\Delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(z) - L| < \varepsilon$ โดยที่ $0 < |z - z_0| < \Delta$

Theorem 17.4.1 Limit of Sum, Product, Quotient

Suppose $\lim_{z \to z_0} f(z) = L_1$ and $\lim_{z \to z_0} g(z) = L_2$. Then

(*i*) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = L_1 + L_2$

(*ii*) $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = L_1 L_2$

(*iii*) $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$

* f must be defined in a neighborhood of z_0

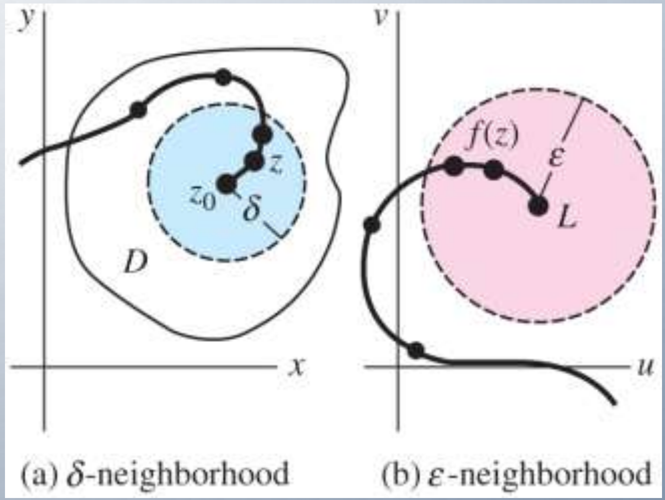


Figure 17.4.5: Geometric meaning of a complex limit

ฟังก์ชันวิเคราะห์(ANALYTIC FUNCTIONS)

- ฟังก์ชัน $w = f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 ถ้าสามารถหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด z_0 และทุกจุดที่อยู่ใกล้ z_0 ได้

Definition 17.4.4 Analyticity at a Point

A complex function $w = f(z)$ is said to be **analytic at a point** z_0 if f is differentiable at z_0 and at every point in some neighborhood of z_0.

สมการโคชี-รีมันน์(CAUCHY–RIEMANN EQUATIONS)

- สมการโคชี-รีมันน์ สัมพันธ์กับอนุพันธ์ย่อยลำดับที่ 1
- ถ้า $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $z = x + iy$ ดังนั้น ที่จุด z จะมีอนุพันธ์ย่อยลำดับที่ 1 ของ u และ v และสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

สมการโคชี-รีมันน์(CAUCHY–RIEMANN EQUATIONS)

EXAMPLE 1 Using the Cauchy–Riemann Equations

The polynomial $f(z) = z^2 + z$ is analytic for all z and $f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$. Thus, $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ and $v(x, y) = 2xy + y$. For any point (x, y), we see that the Cauchy–Riemann equations are satisfied:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

EXAMPLE 2 Using the Cauchy–Riemann Equations

Show that the function $f(z) = (2x^2 + y) + i(y^2 - x)$ is not analytic at any point.

SOLUTION We identify $u(x, y) = 2x^2 + y$ and $v(x, y) = y^2 - x$. Now from

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x \quad \text{and} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

สมการโคชี-รีมันน์(CAUCHY–RIEMANN EQUATIONS)

- ค่าจริงของฟังก์ชัน $\phi(x, y)$ ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยลำดับที่ 2 ต่อเนื่องในโดเมน D และสอดคล้องกับสมการลาปลาซจะถูกเรียกว่า ฮาร์โมนิค (HARMONIC) ใน D
- ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน ถ้าฟังก์ชันนั้นมีอนุพันธ์ทุกจุด
- ถ้า $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D ดังนั้นฟังก์ชัน u และ v เป็นฮาร์โมนิค

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม
(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS)

- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(cos(y) + isin(y))$$

- อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ

$$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

- ค่าลอกาลิทึมของจำนวนเชิงซ้อน z มีค่าเป็นอนันต์

$$ln\, z = ln|z| + i(\theta + 2n\pi), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม (EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS)

$$z = x + iy$$

$$w = ln\, z$$

$$u + iv = ln\, z$$

$$e^{u+iv} = x + iy$$

$$e^{u}(cos(v) + isin(v)) = x + iy$$

$$x = e^{u}\, cos(v)\, , y = e^{u}\, sin(v)$$

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = e^{2u}$$

$$tan(v) = \frac{y}{x}\, , v = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \theta$$

$$u = ln|z|$$

$$v = \theta + 2n\pi$$

อนุกรมเทย์เลอร์ (TAYLOR SERIES)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

$$f'(x) \; = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$

$$f''(x) \; = 2a_2 + (3)(2)a_3 x + (4)(3)a_4 x^2 + (5)(4)a_5 x^3 + \cdots$$

$$f'''(x) = (3)(2)(1)a_3 + (4)(3)(2)a_4 x + (5)(4)(3)a_5 x^2 + \cdots$$

$$f''''(x) = (4)(3)(2)(1)a_4 + (5)(4)(3)(2)a_5 x + \cdots$$

$$f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2a_2, f'''(0) = (3)(2)(1)a_3, f''''(0) = (4)(3)(2)(1)a_4$$

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1}, a_2 = \frac{f''(0)}{2 \times 1}, a_3 = \frac{f'''(0)}{3 \times 2 \times 1}, a_4 = \frac{f''''(0)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}, a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม (EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS)

- $e^{ix} = cos(x) + isin(x)$: *EULER'S FORMULA*
- $f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n$
- $f(x) = e^{ix} = \frac{1}{0!} + \frac{i}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{i}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{i}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - \frac{i}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{i}{9!}x^9 - \cdots = \left\{\frac{1}{0!} - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \cdots\right\} + i\left\{\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \cdots\right\} = cos(x) + i\, sin(x)$

ฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค (TRIGONOMETRIC AND HYPERBOLIC FUNCTIONS)

- สำหรับจำนวนเชิงซ้อน ใดๆ $z = x + iy$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

- ค่าอนุพันธ์และค่าเอกลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อนของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเหมือนกับฟังก์ชันจำนวนจริง

- ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิคไซน์และโคไซน์ เทียบได้กับจำนวนจริง

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค (INVERSE TRIGONOMETRIC AND HYPERBOLIC FUNCTIONS)

$$w = sin^{-1} z \Leftrightarrow z = sin(w)$$

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

ดังนั้น QUADRATIC FORMULA

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

ดังนั้น

$$sin^{-1} z = w = -i \, ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค (INVERSE TRIGONOMETRIC AND HYPERBOLIC FUNCTIONS)

$$v = cos^{-1} z \Leftrightarrow z = cos(v)$$

$$z = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}$$

$$e^{2iv} - 2ze^{iv} + 1 = 0$$

ดังนั้น QUADRATIC FORMULA

$$e^{iv} = 2z + \sqrt{z^2 - 1} = 2z + i\sqrt{1 - z^2}$$

ดังนั้น

$$cos^{-1} z = v = -i\, ln(z + i\sqrt{1 - z^2})$$

อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค (INVERSE TRIGONOMETRIC AND HYPERBOLIC FUNCTIONS)

$$h = tan^{-1} z \Leftrightarrow z = tan(h)$$

$$z = -i\frac{e^{ih} - e^{-ih}}{e^{ih} + e^{-ih}}$$

$$ze^{ih} + ze^{-ih} = -ie^{ih} + ie^{-ih}$$

$$(i + z)e^{ih} = (i - z)e^{-ih}$$

$$e^{2ih} = \frac{i - z}{i + z}$$

$$h = tan^{-1} z = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{i - z}{i + z}\right) = \frac{i}{2} ln\left(\frac{i + z}{i - z}\right)$$

ดังนั้น

อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค (INVERSE TRIGONOMETRIC AND HYPERBOLIC FUNCTIONS)

- อินเวอร์สของฟังก์ชันลอกาลิทึมและอนุพันธ์ มีค่าดังนี้

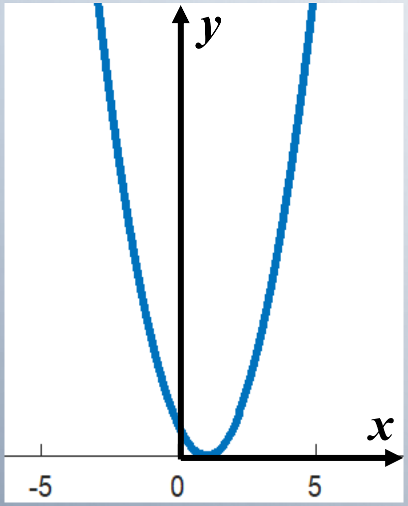
$$sin^{-1} z = -i\, ln\left[iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad \frac{dsin^{-1}z}{dz} = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$cos^{-1} z = -i\, ln\left[z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad \frac{dcos^{-1}z}{dz} = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

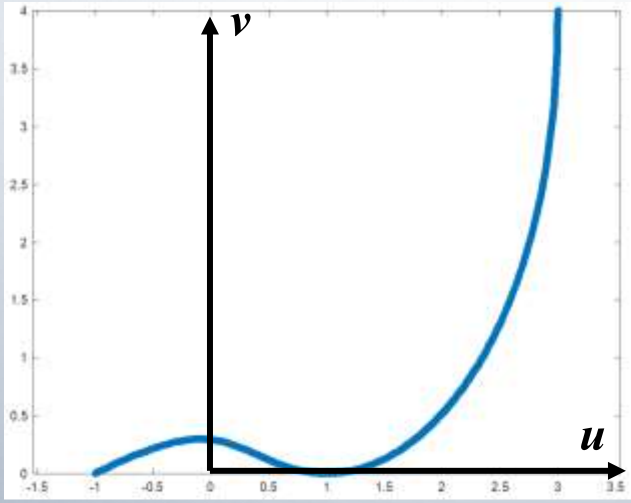
$$tan^{-1} z = \frac{i}{2} ln\frac{i+z}{i-z} \qquad \frac{dtan^{-1}z}{dz} = \frac{1}{1+z^2}$$

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(COMPLEX FUNCTIONS)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาภาพ (IMAGE) ของ $y=(x-1)^2$ ดังรูปด้านล่างด้วยการแมปปิ้ง $f(z)=z^2$



$y=(x-1)^2$



$f(z)=f(x+iy)=z^2$

$=x^2+2ixy-y^2$

$=(x^2-y^2)+i(2xy)$

$u(x,y)=x^2-y^2=x^2-(x-1)^4$

$v(x,y)=2xy=2x(x-1)^2$