ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

Chapter 9

Lecture2-Vector Calculus Part5

Assoc. Prof. Dr. Santhad Chuwongin

Outline

9.0 Partial Derivatives (อนุพันธ์ย่อย)

9.1 Curl and Divergence (เคิร์ล และไดเวอร์เจนซ์) p.20

9.2 Double Integrals (ปริพันธ์สองชั้น หรืออินทิกรัลสองชั้น) p.23

9.3 Double Integrals in Polar Coordinates (ปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว) p.30

9.4 Line Integrals (ปริพันธ์ตามเส้น หรืออินทิกรัลตามเส้น) p.43

9.5 Independence of the Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง) p.58

9.6 Green's Theorem (ทฤษฎีบทของกรีน (2 มิติ)) p.76

9.7 Surface Integrals (ปริพันธ์ตามผิว หรืออินทิกรัลตามผิว) p.94

9.8 Stokes' Theorem (ทฤษฎีของสโตกส์ (3 มิติ)) p.103

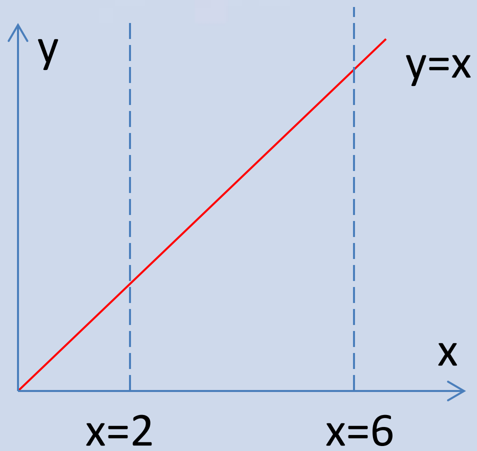
9.9 Triple Integrals (ปริพันธ์สามชั้น หรืออินทิกรัลสามชั้น) p.121

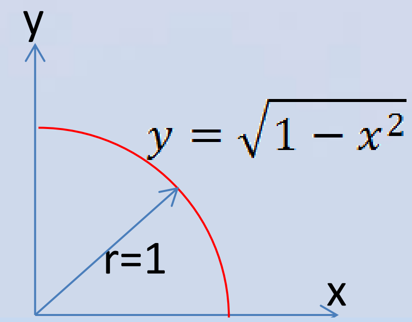
9.10 Divergence Theorem (ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์) p.140

9.11 Change of Variables in Multiple Integrals (การแปลงตัวแปร) p.144

Surface Integrals (อินทิกรัลตามผิว)

- บนระนาบ xy ความยาวของส่วนโค้ง (arc) ของกราฟ $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ มีค่าเท่ากับ





$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

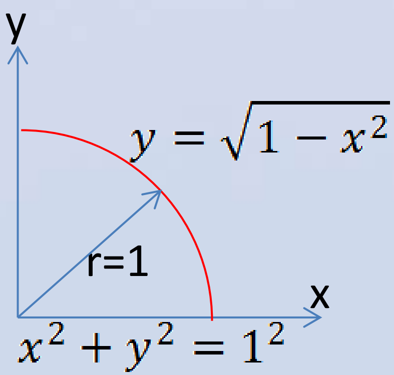
$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

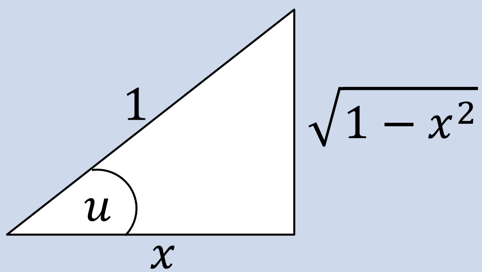
$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f_x(x)]^2}\, dx$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \sin(u)$$

Surface Integrals (อินทิกรัลตามผิว)



$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b \sqrt{1 + [f_x(x)]^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$



$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{\sin u}\, d\cos u = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\sin u}{\sin u}\, du = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} du = \frac{\pi}{2}$$

Surface Integrals (อินทิกรัลตามผิว)

EXAMPLE Evaluate $\iint_S y\,dS$, where S is the surface $z = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. (See Figure 2.)

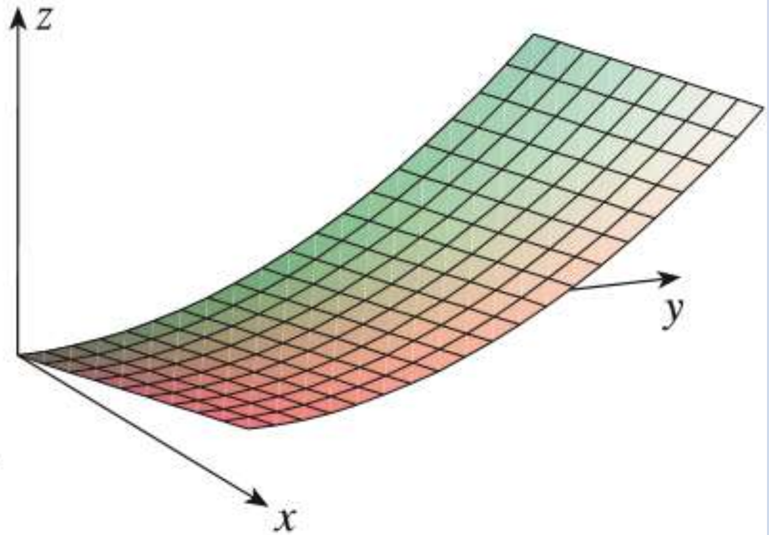


FIGURE 2

SOLUTION

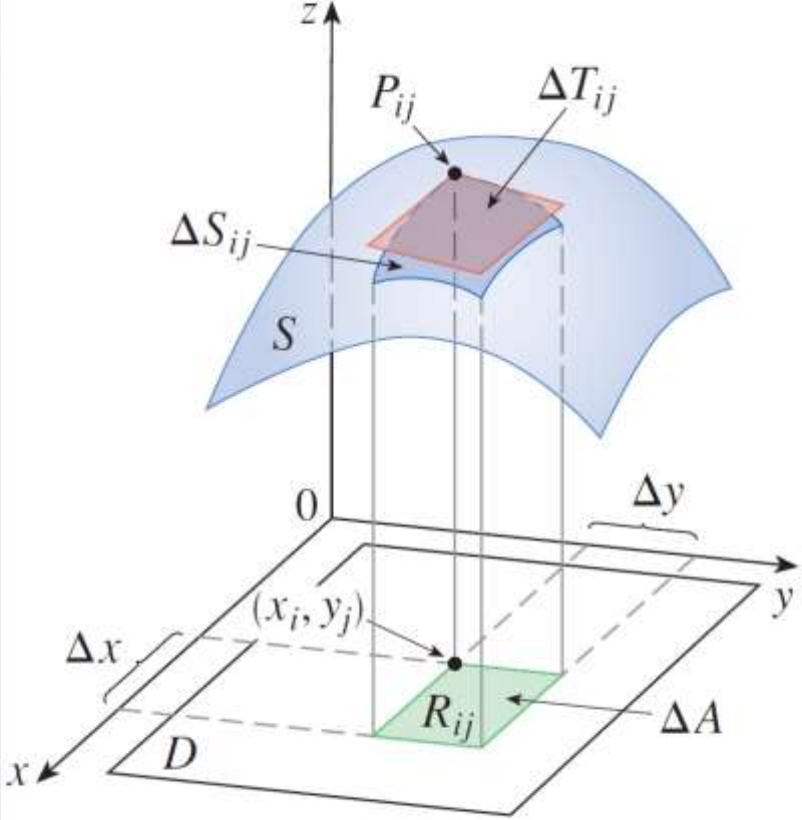
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

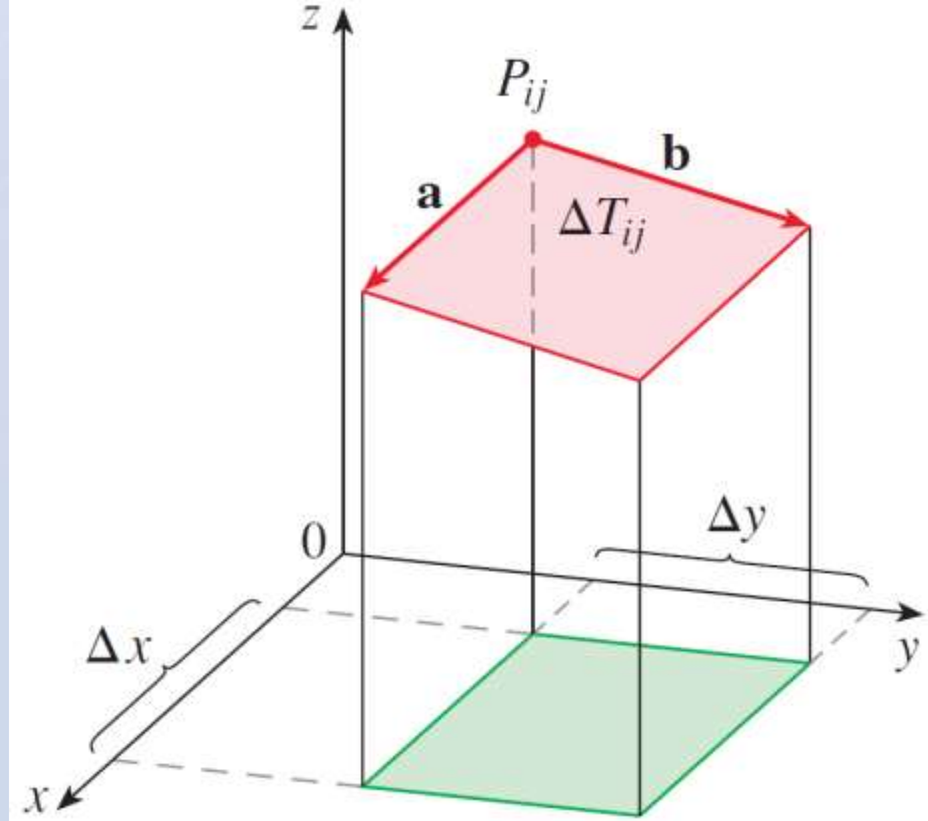
$$\iint_S y\,dS = \iint_D y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 dx\,\sqrt{2}\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\,dy$$

$$= \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 2y^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$





$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = [-f_x(x_i, y_j)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta x \Delta y$$

$$\Delta T_{ij} = |\mathrm{a} \times \mathrm{b}| = \sqrt{1 + [f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2}\,\Delta x \Delta y$$

$$\Delta T_{ij} = \sqrt{1 + [f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2}\,\Delta A \approx \Delta S_{ij}$$

$$\Delta T_{ij} = \sqrt{1 + [f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2}\,dA$$

$$A(S) = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

$$\mathrm{a} = \Delta x\mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\Delta x\mathbf{k}$$

$$\mathrm{b} = \Delta y\mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\Delta y\mathbf{k}$$

$f_x(x_i, y_j), f_y(x_i, y_j)$ ความชันของเว็คเตอร์ a, b

$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & \mathbf{0} & f_x(x_i, y_j)\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\Delta y \end{vmatrix}$$

Surface Integrals (อินทิกรัลตามผิว)

Definition 9.13.1 Surface Area

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อย f_x , f_y ต่อเนื่องบนขอบเขต R ดังนั้น พื้นที่ของพื้นผิว (Surface Area) เหนือขอบเขต R มีค่าเท่ากับ

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA. \qquad (2)$$

Definition 9.13.2 Surface Integral

ให้ G เป็นฟังก์ชันที่มี 3 ตัวแปรที่ถูกกำหนดให้อยู่เหนือบริเวณพื้นผิว 3มิติ S ดังนั้น อินทิกรัลตามผิว (Surface Integral) ของ G เหนือบริเวณ S มีค่าเท่ากับ

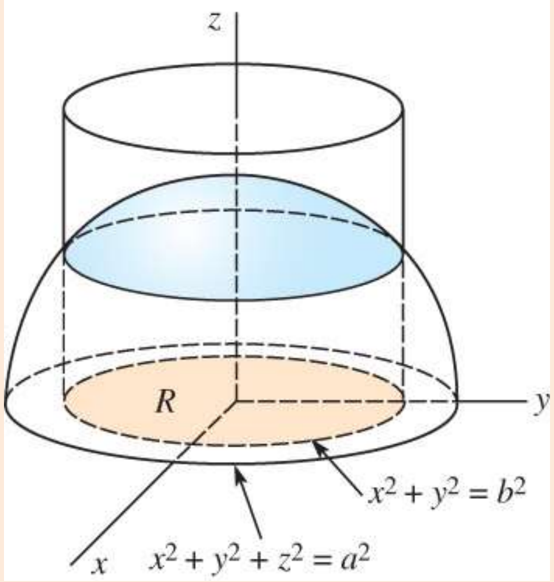
$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta S_k. \qquad (4)$$

- ***การประยุกต์ใช้อินทิกรัลตามผิว จะถูกใช้เพื่อหาค่ามวลของพื้นผิว ฟลักซ์ที่ไหลผ่านพื้นผิว หรือ ประจุบนพื้นผิว เป็นต้น***

Surface Integrals (อินทิกรัลตามผิว)

ตัวอย่าง

จงหาพื้นที่ของ Surface ซึ่งเป็นส่วนของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ที่อยู่เหนือระนาบ xy และอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = b^2, 0 < b < a$



จากรูป $z = f(x,y)$ โดย $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ดังนั้น

$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ และ $f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ ดังนั้น

$$\sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

ดังนั้น $A(S) = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dA$ โดยที่ R คือขอบเขตที่กำหนดให้ดังรูป และเพื่อหาค่าอินทิกรัลสองชั้น เราจะใช้ Polar coordinates

$$A(S) = a\int_0^{2\pi}\int_0^{b} (a^2 - r^2)^{-1/2}\, r\,dr\,d\theta = a\int_0^{2\pi} \left[-(a^2 - r^2)^{1/2}\right]_0^b d\theta$$

$$= a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$

```
clear
% a=5, b=3
fun = @(x,y) 5./sqrt(5^2 - x.^2 - y.^2);
xmax = @(y) sqrt(3.^2 - y.^2);
xmin = @(y) -sqrt(3.^2 - y.^2);
sol = integral2(fun,-3,3,xmin,xmax)
```

Surface Integrals (อินทิกรัลตามผิว)

ตัวอย่าง

จงหาค่า $\iint_S xz^2 dS$ โดยที่ S เป็นส่วนของทรงกระบอก $y = 2x^2 + 1$ ที่อยู่ในควอแดรนต์ที่๑ ถูกจำกัดขอบเขตด้วย $x = 0, x = 2, z = 4$ และ $z = 8$

เราทราบว่า $g(x,z) = 2x^2 + 1$ และ R คือบริเวณสี่เหลี่ยมในระนาบ xz ดังรูป และเนื่องจาก $g_x(x,z) = 4x$ และ $g_z(x,z) = 0$ ดังนั้น

$$\iint_S xz^2 dS = \int_0^2 \int_4^8 xz^2 \sqrt{1 + 16x^2}\, dz dx = \int_0^2 \left[\frac{z^3}{3} x\sqrt{1 + 16x^2}\right]_4^8 dx$$

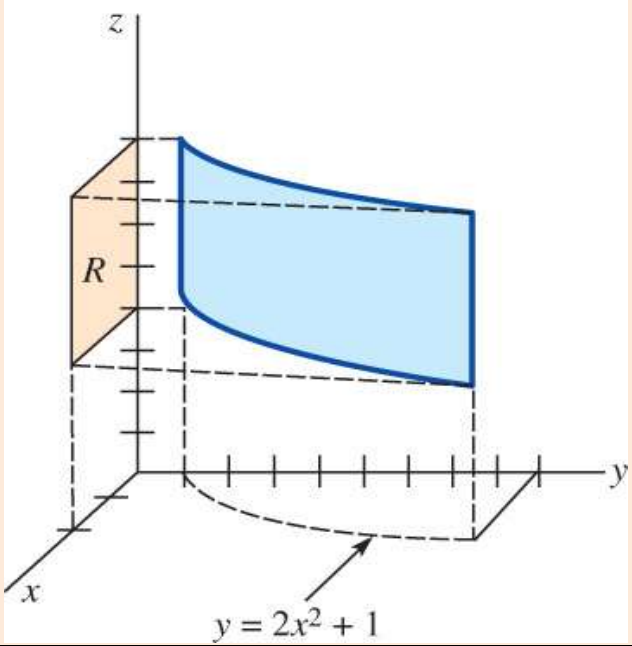
$$= \frac{448}{3} \int_0^2 x(1 + 16x^2)^{1/2}\, dx$$

$$= \left[\frac{28}{9}(1 + 16x^2)^{3/2}\right]_0^2$$

$$= \frac{28}{9}\left(65^{3/2} - 1\right)$$

$$\approx 1627.3$$

```
clear
fun = @(x,z) x.*z.^2.*sqrt(1+16*x.^2)
q = integral2(fun,0,2,4,8)
```



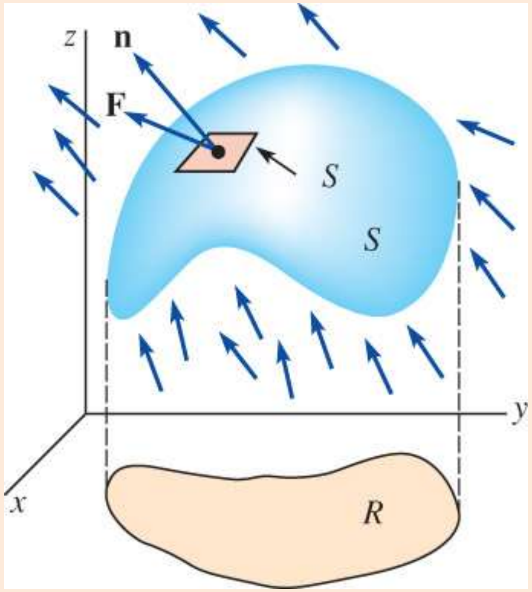
Integrals of Vector Fields
(อินทิกรัลของสนามเว็คเตอร์)

ถ้า $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ เป็นสนามความเร็วของของเหลว ตามที่เราเห็นในรูป ปริมาตรของของเหลวที่ไหลผ่านส่วนย่อยๆของพื้นที่ผิว ΔS ต่อหนึ่งหน่วยเวลา จะมีค่าโดยประมาณเท่ากับ

ความสูง $\times$ พื้นที่ฐาน = $(\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\,\Delta S = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S$

โดยที่ $\mathbf{n}$ คือเว็คเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว ตามรูป ปริมาณของเหลวทั้งหมดที่ไหลผ่าน S ต่อหนึ่งหน่วยเวลา จะถูกเรียกว่า ฟลักซ์ของ $\mathbf{F}$ ที่ผ่าน S และมีค่าเท่ากับ

$$\text{flux of } \mathbf{F} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS$$



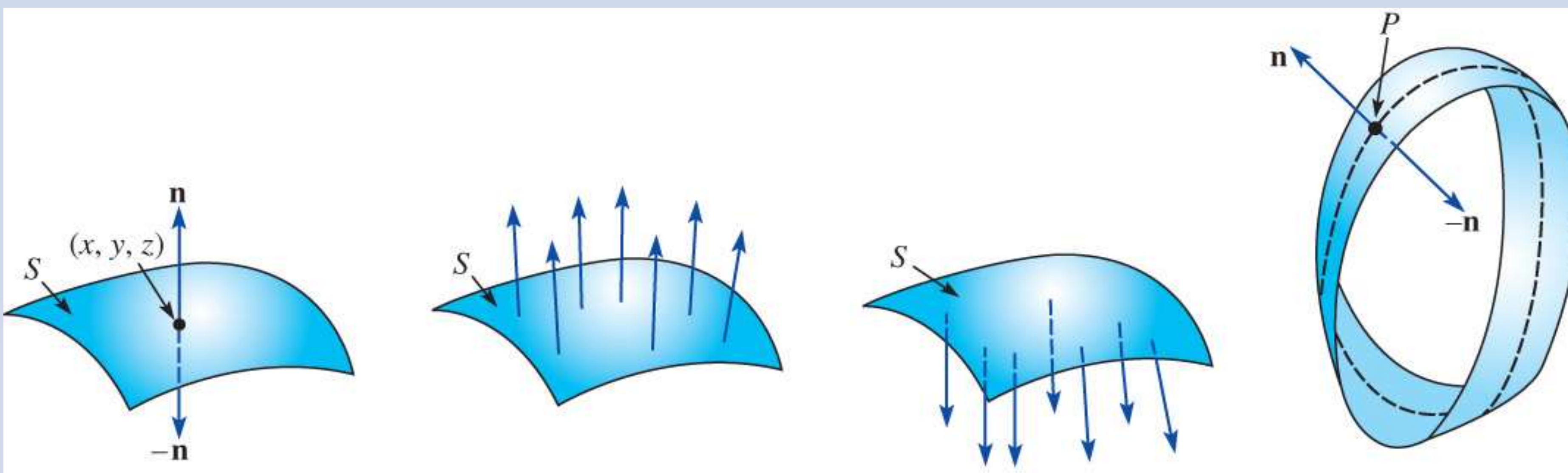
ในกรณีของพื้นผิวปิด S

ถ้า $\mathbf{n}$ ตั้งฉากกับพื้นผิวด้านนอก (ด้านใน) จะความหมายว่า ปริมาณของเหลวที่ไหลออก (เข้า) ผ่านพื้นผิว S ต่อหนึ่งหน่วยเวลา

Integrals of Vector Fields
(อินทิกรัลของสนามเว็คเตอร์)

ถ้าพื้นผิวเรียบ S ถูกกำหนดให้เป็น $g(x,y,z)=0$ ดังนั้น เว็คเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว คือ

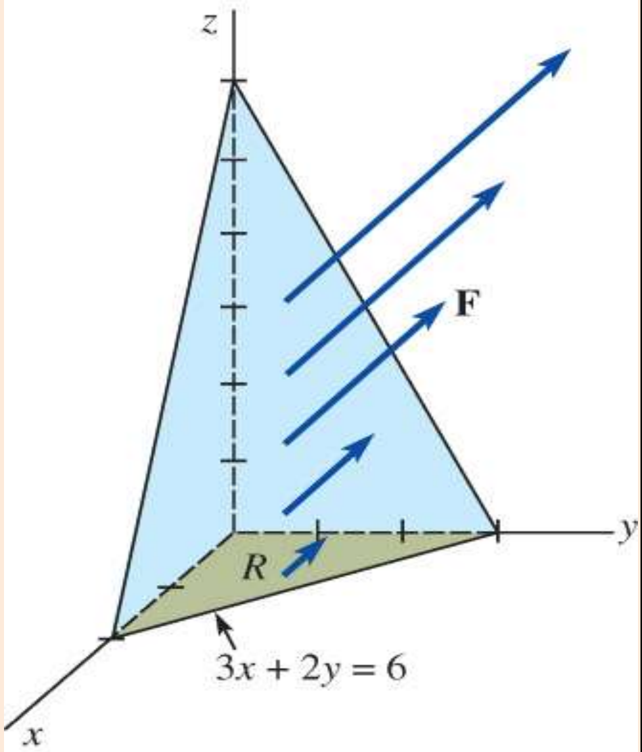
$$\mathrm{n}=\frac{\nabla \mathrm{g}}{\|\nabla \mathrm{g}\|}=\frac{\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{i}+\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{j}+\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{k}}{\sqrt{\left[\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}}\right]^2+\left[\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{y}}\right]^2+\left[\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{z}}\right]^2}}$$



(a) (b) (c) (d)

Flux Through a Surface (ฟลักซ์ที่ไหลผ่านพื้นผิว)

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ แทนการไหลของของเหลว จงหาฟลักซ์ (flux) ของ $\mathbf{F}$ ที่ผ่านพื้นผิว S ซึ่งเป็นส่วนของระนาบ $z=6-3x-2y$ ที่อยู่ในอัฐภาค (octant) ที่ 1



จากรูปที่แสดง สนามเว็คเตอร์ และพื้นผิวคือ ระนาบ $g(x,y,z)=3x+2y+z-6=0$

เว็คเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว และมีค่า $\mathbf{z}$ ที่เป็น $+$ คือ

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{3\mathbf{i}}{\sqrt{14}}+\frac{2\mathbf{j}}{\sqrt{14}}+\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{14}}$$

ดังนั้น

$$\text{flux}=\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS=\frac{1}{\sqrt{14}}\iint_S 3z\, dS$$

และจากรูป R คือ โปร์เจ็คชันของพื้นผิวลงบนระนาบ xy ดังนั้น

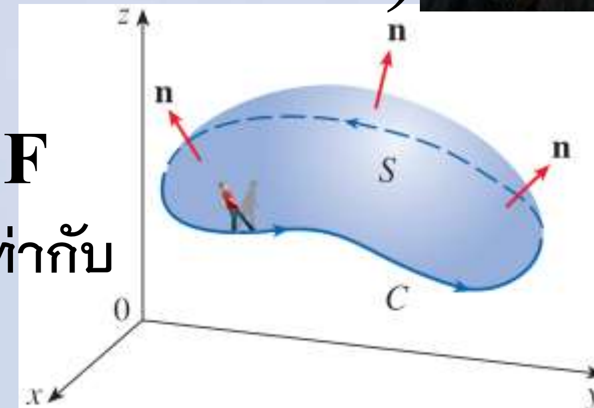
$$\text{flux}=\frac{3}{\sqrt{14}}\iint_S (6-3x-2y)\ (\sqrt{14}dA)$$

$$=3\int_0^2\int_0^{3-\frac{3x}{2}} (6-3x-2y)\ dydx\ =18$$

```
clear
syms x y z
plane=[x,y,6-3*x-2*y]
F = [0,z,z]
ndS = cross(diff(plane,x),diff(plane,y))
Fpar = subs(F,[x,y,z],plane)
flux = int(int(dot(Fpar,ndS),x,0,2-2/3*y),y,0,3)
flux2 = int(int(dot(Fpar,ndS),y,0,3-3/2*x),x,0,2)
```

Stokes' Theorem (ทฤษฎีของสโตกส์)

- ทฤษฎีของสโตกส์(3D) คล้ายทฤษฎีบทของกรีน(2D)
- ทฤษฎีของสโตกส์ กล่าวว่า อินทิกรัลตามเส้น C ของ $\mathbf{F}$ รอบพื้นผิว S ตามทิศทางของเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีค่าเท่ากับ อินทิกรัลตามผิวของ $\nabla\times\mathbf{F}$ ตลอด S



Theorem 9.14.1 Stokes' Theorem

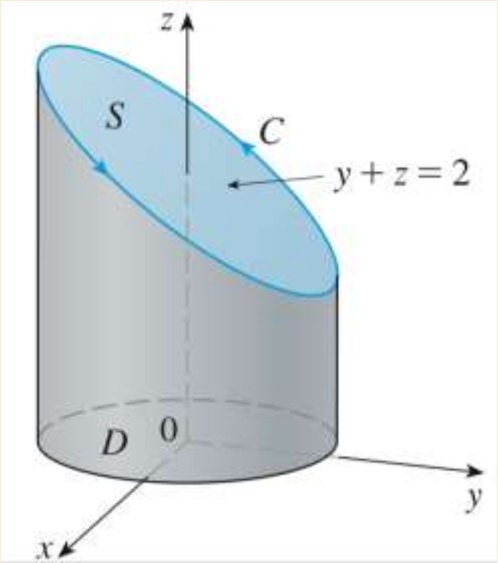
ให้ S เป็นพื้นผิวที่มีทิศทาง (orientable surface)และเรียบเป็นช่วง ๆ (piecewise-smooth) ซึ่งมีขอบเขตเป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่าย C ที่เรียบเป็นช่วง ๆ ให้ $\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ เป็นสนามเว็คเตอร์ โดยที่ P,Q,R เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่ง $(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$ ต่อเนื่องในบริเวณของปริภูมิ 3มิติ $(\mathbb{R}^3)$ ที่บรรจุ S (สามารถหาค่าได้) ถ้าหาก C ถูกสำรวจไปในทิศทางบวก (positive direction)

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\oint_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})dS=\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

โดยที่ $\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ S ในทิศทางของการวางแนวของ S (ถ้าคุณเดินในทิศทางบวกรอบ C โดยหันศีรษะของคุณไปในทิศทางของ $\mathbf{n}$ แล้วผิวจะอยู่ทางซ้ายมือของคุณเสมอ)

Stokes' Theorem (ทฤษฎีของสโตกส์)

ตัวอย่าง จงหาค่า $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ $\mathbf{F}(x,y,z)=-y^2\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ และ C เป็นเส้นโค้งที่เกิดจากระนาบ $y+z=2$ ตัดกับทรงกระบอก $x^2+y^2=1$ ดังรูป



จาก $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ เราสามารถหา $\nabla\times\mathbf{F}$ ได้ดังนี้

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1+2y)\mathbf{k}$$

และเรารู้ว่า $g(x,y,z)=y+z-2=0$ ดังนั้นเว็คเตอร์หน่วยทิศพุ่งขึ้น คือ

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$$

$$z = f(x,y) = 2 - y$$
$$f_x(x,y) = 0$$
$$f_y(x,y) = -1$$

ใช้ทฤษฎีของสโตกส์

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S (1+2y)\,dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_D (1+2y)\sqrt{2}\,dA$$

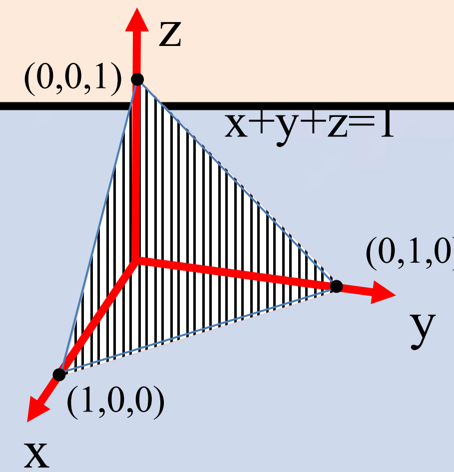
$$= \int^{2\pi}\int^{1} (1+2r\sin\theta)r\,dr\,d\theta = \pi$$

```
clear
syms z x y t r
F4 = [-y^2,x,z^2]
sigma = [r*cos(t),r*sin(t),2-y]
boundary=subs(sigma,r,1)
int(dot(subs(F4,[x,y,z],boundary),diff(boundary,t)),t,0,2*pi)
ndS=simplify(cross(diff(sigma,r),diff(sigma,t)))
curlF4=curl(F4,[x,y,z])
```

Stokes' Theorem (ทฤษฎีของสโตกส์)

ตัวอย่าง จงหาค่า $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ C เป็นเส้นทางสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ (1,0,0) (0,1,0) และ (0,0,1)

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x+y^2)\mathbf{i}+(y+z^2)\mathbf{j}+(z+x^2)\mathbf{k}$$



$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+y^2 & y+z^2 & z+x^2\end{vmatrix}=-2z\mathbf{i}-2x\mathbf{j}-2y\mathbf{k}$$

และเรารู้ว่า $g(x,y,z)=x+y+z-1=0$ ดังนั้นเว็คเตอร์หน่วยทิศพุ่งขึ้น คือ $\mathbf{n}=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

ใช้ทฤษฎีของสโตกส์

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS=\frac{-2}{\sqrt{3}}\iint_S(x+y+z)\,dS=\frac{-2}{\sqrt{3}}\iint_S dS=\frac{-2}{\sqrt{3}}\iint_R\sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dxdy$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{3}}\int_0^1\int_0^{1-y}\sqrt{3}\,dxdy=-2\int_0^1\int_0^{1-y}dxdy=-2\int_0^1(1-y)\,dy=-2\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1=-1$$

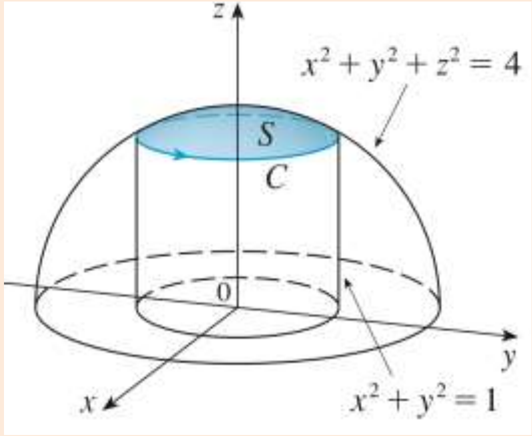
```
clear
syms x y z
plane=[x,y,1-x-y]
F = [x+y^2,y+z^2,z+x^2]
F = subs(F,[x,y,z],plane)
ndS = cross(diff(plane,x),diff(plane,y))
sol = int(int(dot(curl(F,[x,y,z]),ndS),y,0,1-x),x,0,1)
```

curl $\mathbf{F}=-2z\,\mathbf{i}-2x\,\mathbf{j}-2y\,\mathbf{k}$ and we take the surface S to be the planar region enclosed by C, so S is the portion of the plane

Stokes' Theorem (ทฤษฎีของสโตกส์)

ตัวอย่าง จงใช้ทฤษฎีของสโตกส์ หาค่า $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$ โดยที่ $\mathbf{F}(x,y,z)=xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ และ S เป็นพื้นผิวที่เกิดจากทรงกลม $x^2+y^2+z^2=4$ และทรงกระบอก $x^2+y^2=1$ ตัดกันดังรูป จาก $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ เราสามารถหา $\nabla\times\mathbf{F}$ ได้ดังนี้

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz & yz & xy\end{vmatrix}=(x-y)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$$



และเรารู้ว่า $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4=0$ ดังนั้น $\mathbf{n}$ คือ

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{2}$$ และ $f(x,y)=z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

ใช้ทฤษฎีของสโตกส์

```
clear
syms x y z t r
F = [x*z,y*z,x*y]
boundary = [r*cos(t),r*sin(t),sqrt(4-(r*cos(t))^2-(r*sin(t))^2)]
ndS=cross(diff(boundary,r),diff(boundary,t))
curlF=curl(F,[x,y,z])
sol = int(int(dot(curlF,ndS),r,0,1),t,0,2*pi)
```

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,Ds$$

$$=\frac{1}{2}\iint_S (x(x-y)+y(x-y))\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\left(r^2\cos 2\theta\right) r\,dr\,d\theta = 0$$

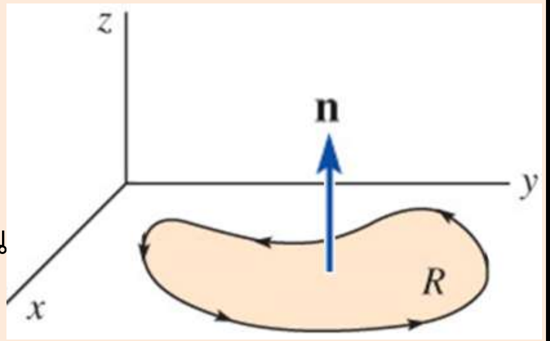
เปรียบเทียบทฤษฎีของสโตกส์ กับ ทฤษฎีบทของกรีน

- **ทฤษฎีบทของกรีน เป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีของสโตกส์ ในระนาบ xy**

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$ **(สโตกส์)**

กฎ: ถ้าเราเดินตาม C ในทิศทางที่เป็นบวก พื้นผิว S จะอยู่ด้านซ้ายมือเรา ดังนั้น $\mathbf{n}$ จะมีทิศพุ่งออกจากพื้นผิว (ชี้ขึ้น) ดังรูป

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$ **(กรีน)**



<u>ตัวอย่างการเปรียบเทียบทฤษฎีของสโตกส์ กับ ทฤษฎีบทของกรีน</u>

ถ้า S เป็นส่วนราบเรียบบนระนาบ xy ที่ถูกปิดล้อมด้วย C ทิศทวนเข็มนาฬิกาดังนั้น

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dxdy$$

โดยทฤษฎีบทของกรีน $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dxdy$

ดังนั้น ทฤษฎีบทของสโตกส์ และกรีนมีค่าเท่ากัน

<u>หมายเหตุ</u> ทฤษฎีของสโตกส์ เรามีอิสระในการเลือกพื้นผิว S ใดๆก็ได้ ที่ถูกปิดล้อมด้วย C (C=วงกลม S=ดิสก์, ครึ่งทรงกลม, กรวย เป็นต้น)

<u>พิสูจน์ทฤษฎีของสโตกส์</u>

1. ถ้า C และ S คือ ระนาบ xy ดังนั้น ทฤษฎีของสโตกส์=ทฤษฎีบทของกรีน
2. ถ้า C และ S คือ ระนาบใดๆ ดังนั้น ทฤษฎีของสโตกส์=ทฤษฎีบทของกรีน ในระนาบนั้นๆ

Proof Stokes' Theorem (พิสูจน์ทฤษฎีของสโตกส์)

1. **ด้านขวาของสมการ ทฤษฎีของสโตกส์**

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})dS = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\mathbf{F} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

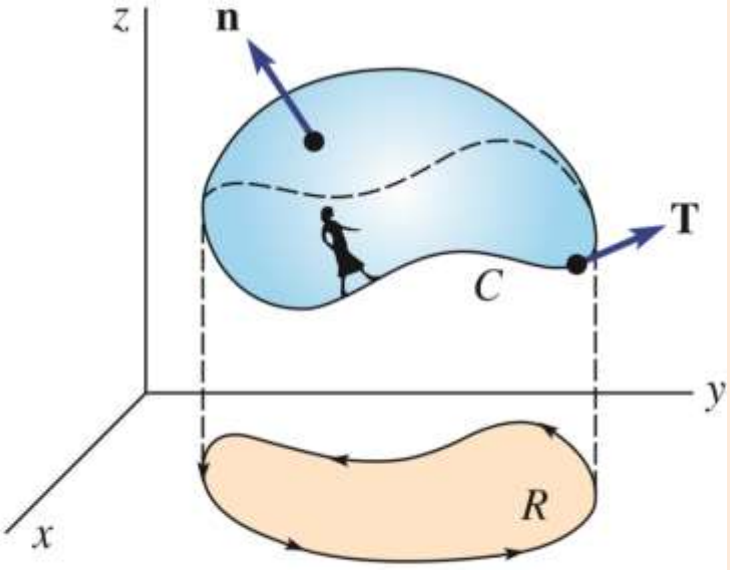
และสมการของพื้นผิว S คือ $z = f(x,y)$ หรือ $z - f(x,y) = 0$

$$\nabla\times \mathrm{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{k}$$

สมมุติให้ $g(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$

$$\mathrm{n} = \frac{\nabla \mathrm{g}}{\|\nabla \mathrm{g}\|} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{j} + 1\mathrm{k}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2}}$$

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS = \iint_R \left\{-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} dA$$



Proof Stokes' Theorem (พิสูจน์ทฤษฎีของสโตกส์)

2. **ด้านซ้ายของสมการ ทฤษฎีของสโตกส์**

สมการ parametric representation of C คือ

$$x = x(t), y = y(t), z = f\big(x(t), y(t)\big), a \leq t \leq b$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy + R dz = \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right) dt \leftarrow \text{กฎลูกโซ่}$$

$$= \oint_{C_{xy-plane}} \left(\left(P + R \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy \right)$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial \left(Q + R \frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(P + R \frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial y} \right) dA \quad \leftarrow \text{ทฤษฎีบทของกรีน}$$

Proof Stokes' Theorem (พิสูจน์ทฤษฎีของสโตกส์)

1. พจน์แรกของสมการ ทฤษฎีบทของกรีน

$$\frac{\partial\left(Q+R\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(Q\big(x,y,f(x,y)\big)+R\big(x,y,f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}$$

2. พจน์ที่สองของสมการ ทฤษฎีบทของกรีน

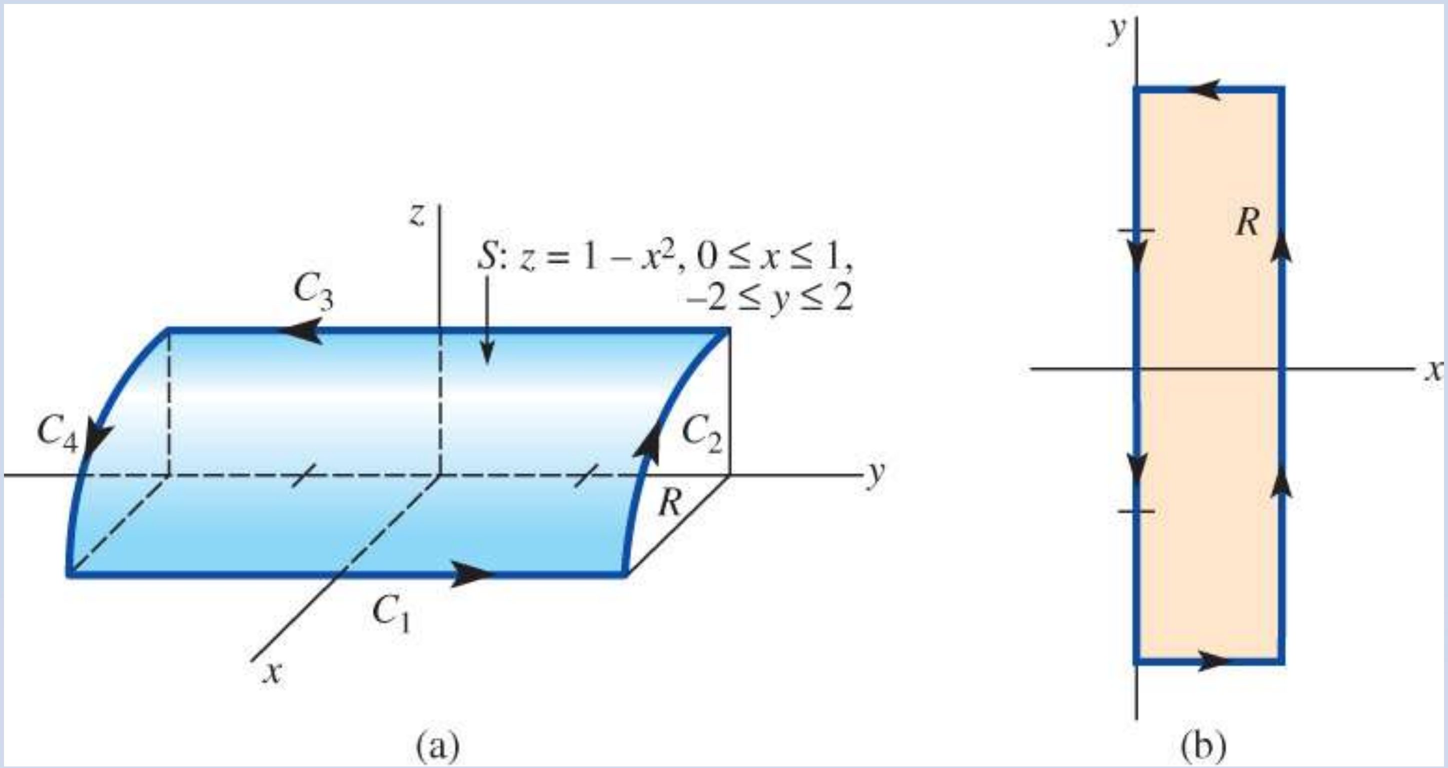
$$\frac{\partial\left(P+R\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}=-\frac{\partial\left(P\big(x,y,f(x,y)\big)+R\big(x,y,f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}-R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}-R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)-\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=\iint_R\left(\frac{\partial\left(Q+R\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(P+R\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}\right)dA=\iint_R\left\{-\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x}-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}dA$$

Stokes' Theorem (ทฤษฎีของสโตกส์)

ตัวอย่าง กำหนดให้ S เป็นส่วนของทรงกระบอก $z=1-x^2$ สำหรับ $0\le x\le 1,\ -2\le y\le 2$ จงพิสูจน์ Stokes' theorem สำหรับสนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ สมมุติให้ S เป็น surface ด้านบนตามรูป S คือ เส้นโค้ง C ประกอบด้วย $C_1, C_2,\ C_3,\ C_4$ และ บริเวณ R แสดงดังรูป



Stokes' Theorem (ทฤษฎีของสโตกส์)

<u>Surface Integral</u> จาก $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ เราสามารถหา $\nabla\times\mathbf{F}$ ได้ดังนี้

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & xz\end{vmatrix}=-y\mathbf{i}-z\mathbf{j}-x\mathbf{k}$$

และเรารู้ว่า $g(x,y,z)=z+x^2-1=0$ เป็นทรงกระบอก ดังนั้นเว็คเตอร์หน่วยทิศพุ่งขึ้น คือ

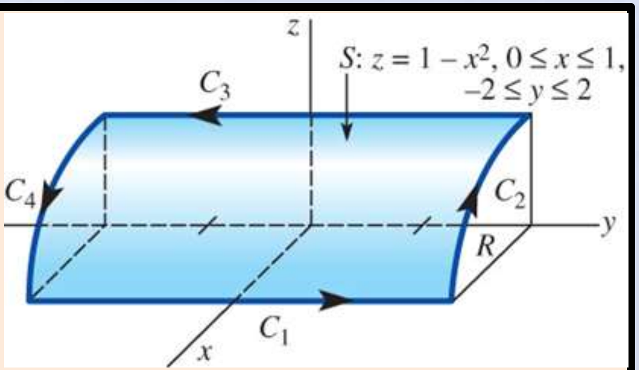
$$\mathbf{n}=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{2x\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+1}}$$

ดังนั้น

$$\iint_S(\text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS=\iint_S\frac{-2xy-x}{\sqrt{4x^2+1}}\,dS=\iint_R(-2xy-x)\,dA=\int_0^1\int_{-2}^{2}(-2xy-x)\,dy\,dx=-2$$

```
clear
syms x y z t r
F = [x*y,y*z,x*z]
boundary = [x,y,1-x^2]
ndS=cross(diff(boundary,x),diff(boundary,y))
curlF=curl(F,[x,y,z])
sol = int(int(dot(curlF,ndS),x,0,1),y,-2,2)
```

Line Integral จาก $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$



บน C_1: x=1, z=0, dx=0, dz=0 ดังนั้น

$$\int_{C_1} y(0) + y(0)dy + 0 = 0$$

บน C_2: y=2, z=1−x^2, dy=0, dz=−2xdx ดังนั้น

$$\int_{C_2} 2xdx + 2(1-x^2)0 + x(1-x^2)(-2xdx) = \int_1^0 (2x + 2x^4 - 2x^2)dx = -\frac{11}{15}$$

บน C_3: x=0, z=1, dx=0, dz=0 ดังนั้น

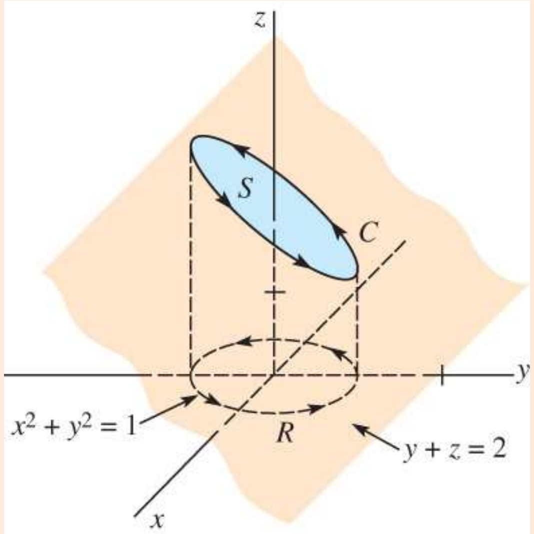
$$\int_{C_3} 0 + ydy + 0 = \int_2^{-2} ydy = 0$$

บน C_4: y=−2, z=1−x^2, dy=0, dz=−2xdx ดังนั้น

$$\int_{C_4} -2xdx - 2(1-x^2)0 + x(1-x^2)(-2xdx) = \int_0^1 (-2x + 2x^4 - 2x^2)dx = -\frac{19}{15}$$

ดังนั้น $\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = -\frac{11}{15} - \frac{19}{15} = -2$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า $\oint_C zdx+xdy+ydz$ โดยที่ C คือเส้นทางของทรงกระบอก $x^2+y^2=1$ ในระนาบ $y+z=2$ ถ้า C วนรอบในทิศทวนเข็มนาฬิกา



จากโจทย์ $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ ดังนั้น เราสามารถหา $\nabla\times\mathbf{F}$ ได้ดังนี้

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

จากทิศทางการวนรอบ C สอดคล้องกับผิวด้านบนของ surface S และเรารู้ว่า $g(x,y,z)=y+z-2=0$ เป็นระนาบ ดังนั้นเว็คเตอร์หน่วยทิศพุ่งขึ้น คือ

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S(\text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS=\iint_S(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).\left(\frac{\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\right)\,dS$$

$$=\sqrt{2}\iint_S dS=\sqrt{2}\iint_R\sqrt{2}\,dA=2\pi$$

```
clear
syms x y z t r
F = [z,x,y]
boundary = [r*cos(t),r*sin(t),2-r*sin(t)]
ndS=cross(diff(boundary,r),diff(boundary,t))
curlF=curl(F,[x,y,z])
sol = int(int(dot(curlF,ndS),r,0,1),t,0,2*pi)
```

<u>ตัวอย่าง</u> จงใช้ Stokes' theorem หาค่า $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ C วนในทิศทวนเข็มนาฬิกา

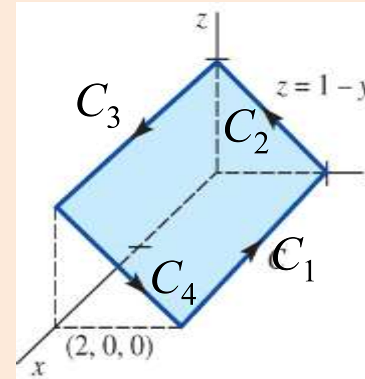
$\mathbf{F}=z^2y\cos xy\,\mathbf{i}+z^2x(1+\cos xy)\mathbf{j}+2z\sin xy\,\mathbf{k}$ โดย C มีขอบเขตเป็น ระนาบ $z=1-y$

<u>วิธีที่ 1</u> (Stokes' theorm)

curl $\mathbf{F} = -2xz\mathbf{i} + z^2\mathbf{k}$. A unit vector normal to the plane is $\mathbf{n} = (\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{2}$. From $z = 1-y$, we have $z_x = 0$ and $z_y = -1$. Thus, $dS = \sqrt{1+1}\,dA = \sqrt{2}\,dA$ and

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R \frac{1}{\sqrt{2}} z^2\sqrt{2}\,dA = \iint_R (1-y)^2\,dA$$

$$= \int_0^2\int_0^1 (1-y)^2\,dy\,dx = \int_0^2 -\frac{1}{3}(1-y)^3\Big|_0^1 dx = \int_0^2 \frac{1}{3}\,dx = \frac{2}{3}.$$



<u>วิธีที่ 2</u> (Direct : $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \left(z^2y\cos xy\,\mathbf{i}+z^2x(1+\cos xy)\mathbf{j}+2z\sin xy\,\mathbf{k}\right)\cdot(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k})$)

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \underset{z=0}{\oint_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}} + \underset{x=0}{\oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}} + \underset{y=0}{\oint_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}} + \oint_{C_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0+0+0+\oint_{C_4} 2z^2(1+\cos 2y)dy+2z\sin 2y\,dz$$

$$= \int_0^1 2(1-y)^2(1+\cos 2y)dy - 2(1-y)\sin 2y\,dy$$

$$= \int_0^1 2(1-y)^2(1+\cos 2y)dy - 2(1-y)\sin 2y\,dy = \frac{2}{3}$$

```
clear
syms x y z
F = [y*z^2*cos(x*y),x*z^2+x*z^2*cos(x*y),2*z*sin(x*y)]
boundary = [x,y,1-y]
ndS=cross(diff(boundary,x),diff(boundary,y))
curlF=curl(F,[x,y,z])
sol = int(int(subs(dot(ndS,curlF),boundary),y,0,1),x,0,2)
sol = sol(3)
```

<u>ตัวอย่าง</u> จงใช้ทฤษฎีสโตกส์หาค่า $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$ สมมุติว่า S มีทิศพุ่งขึ้น $\mathbf{F}=2xy^2z\mathbf{i}+2x^2yz\mathbf{j}+\left(x^2y^2-6x\right)\mathbf{k}$ โดย S เป็นส่วนของระนาบ $z=y$ ซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอกที่มีฐานเป็นสมการวงกลม $x^2+y^2=1$

จากโจทย์ $\mathbf{F}=2xy^2z\mathbf{i}+2x^2yz\mathbf{j}+\left(x^2y^2-6x\right)\mathbf{k}$ ดังนั้น เราสามารถหา $\nabla\times\mathbf{F}$ ได้ดังนี้

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy^2z & 2x^2yz & x^2y^2-6x\end{vmatrix}=6\mathbf{j}$$

จากทิศทางการวนรอบ C สอดคล้องกับผิวด้านบนของ surface S และเรารู้ว่า $g(x,y,z)=z-y=0$ เป็นระนาบ ดังนั้นเว็คเตอร์หน่วยทิศพุ่งขึ้น คือ

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S(\text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS=\iint_S\frac{-6}{\sqrt{2}}\,dS=\iint_R\frac{-6}{\sqrt{2}}\sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dA=\iint_R -6\,\mathrm{dA}=-6\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathrm{r\,dr\,d\theta}=-6\pi$$

<u>ตัวอย่าง</u> จากข้อที่ผ่านมา จงใช้วิธี line integral หาค่า $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ถ้า $\mathbf{F}=2xy^2z\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} + \left(x^2y^2-6x\right)\mathbf{k}$

โดย C เป็นเส้นโค้งที่เกิดจากระนาบ $z = y$ และอยู่ภายในทรงกระบอกที่มีฐานเป็นสมการวงกลม $x^2+y^2=1$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C 2xy^2z\, d\mathbf{x}+2x^2yz\, d\mathbf{y}+\left(x^2y^2-6x\right) dz$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\cos(t)\sin^3(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t+2\cos^2(t)\sin^2(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t+\left(\cos^2(t)\sin^2(t)-6\cos(t)\right)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\cos(t)\sin^4(t)+3\cos^3(t)\sin^2(t)-6\cos^2(t)\right)\mathrm{d}t = -6\pi$$

```
import sympy as sp
from sympy import symbols, Matrix, cos, sin, diff, pi, integrate
# Define symbols
x, y, z, r, t = sp.symbols('x y z r t')
# Define vector field F
F = Matrix([2*x*y**2*z, 2*x**2*y*z, x**2*y**2 - 6*x])
# Define parameterized boundary
boundary = Matrix([r*sp.cos(t), r*sp.sin(t), r*sp.sin(t)])
# Compute normal differential surface element using cross product
br=diff(boundary, r)
bt=diff(boundary, t)
ndS = Matrix([br[1]*bt[2] - br[2]*bt[1], br[2]*bt[0] - br[0]*bt[2], br[0]*bt[1] - br[1]*bt[0]])
# Compute curl of F
curlF = Matrix([diff(F[2],y)-diff(F[1],z), diff(F[0],z)-diff(F[2],x), diff(F[1],x)-diff(F[0],y)])
# Substitute boundary into curlF
integrand = ndS.dot(curlF)  # Corrected dot product
# Compute double integral
sol = integrate(integrate(integrand, (r, 0, 1)), (t, 0, 2*pi)); print(sol)
```

Stokes' Theorem (ทฤษฎีของสโตกส์)

Use Stokes' theorem to evaluate $\oint_C z^2 e^{x^2} dx + xy^2\, dy + \tan^{-1} y\, dz$ where C is the circle $x^2 + y^2 = 9$, by finding a surface S with C as its boundary and such that the orientation of C is counterclockwise as viewed from above.

We take the surface to be $z = 0$. Then $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ and $dS = dA$.

Since $\text{curl}\ \mathbf{F} = \dfrac{1}{1+y^2}\mathbf{i} + 2ze^{x^2}\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$,

$$\oint_C z^2 e^{x^2}\, dx + xy\, dy + \tan^{-1} y\, dz = \iint_S (\text{curl}\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S y^2\, dS = \iint_R y^2\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \sin^2\theta\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^4 \sin^2\theta \Big|_0^3 d\theta$$

$$= \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{81\pi}{4}.$$

HW

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2yz\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$,
S is the part of the paraboloid $z = 5 - x^2 - y^2$ that lies above the plane $z = 1$, oriented upward

19. A particle moves along line segments from the origin to the points $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$, and back to the origin under the influence of the force field

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + 4y^2\,\mathbf{k}$$

Find the work done.

Triple Integrals (อินทิกรัลสามชั้น)

- **การประยุกต์ใช้งานการอินทิกรัลสามชั้น**
  - **หาปริมาตรของรูปทรงตัน** (Volume of solids)
  - **หามวลของรูปทรงตัน** (Mass of solids)
  - **หาโมเมนลำดับหนึ่งและสอง(โมเมนความเฉื่อย) ของรูปทรงตัน** (First and second moments of solids)
  - **หาโคออดิเนทจุดศูนย์กลางมวล** (Coordinates of center of mass)
  - **หาจุดเซนทรอยด์ของรูปทรงตัน** (Centroid of solids)

Definition 9.15.1 The Triple Integral

ให้ F เป็นฟังก์ชันของ 3 ตัวแปรที่ถูกกำหนดให้อยู่เหนือบริเวณปิด D ใน 3 มิติ ดังนั้น อินทิกรัลสามชั้นของ F เหนือบริเวณ D มีค่าเท่ากับ

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta V_k. \tag{1}$$

Applications A list of some of the standard applications of the triple integral follows:

Volume: If $F(x, y, z) = 1$, then the **volume** of the solid D is

$$V = \iiint_D dV.$$

Mass: If $\rho(x, y, z)$ is density, then the **mass** of the solid D is given by

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV.$$

First Moments: The **first moments** of the solid about the coordinate planes indicated by the subscripts are given by

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dV, \qquad M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dV, \qquad M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV.$$

Center of Mass: The coordinates of the **center of mass** of D are given by

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Centroid: If $\rho(x, y, z) =$ a constant, the center of mass is called the **centroid** of the solid.

Second Moments: The **second moments**, or **moments of inertia** of D about the coordinate axes indicated by the subscripts, are given by

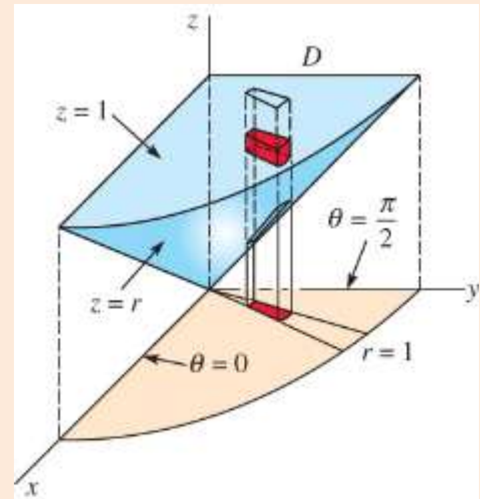
$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

Radius of Gyration: As in Section 9.10, if I is a moment of inertia of the solid about a given axis, then the **radius of gyration** is

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

Center of Mass (Application)

<u>ตัวอย่าง</u> รูปทรงอยู่ในออกแตนท์ที่ 1 และถูกจำกัดขอบเขตด้วยกราฟทรงกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ระนาบ $z = 1$, $x = 0$ และ $y = 0$ จงหาจุดศูนย์กลางมวล ถ้าความหนาแน่นของรูปทรงดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $\rho(r,\theta,z) = r$

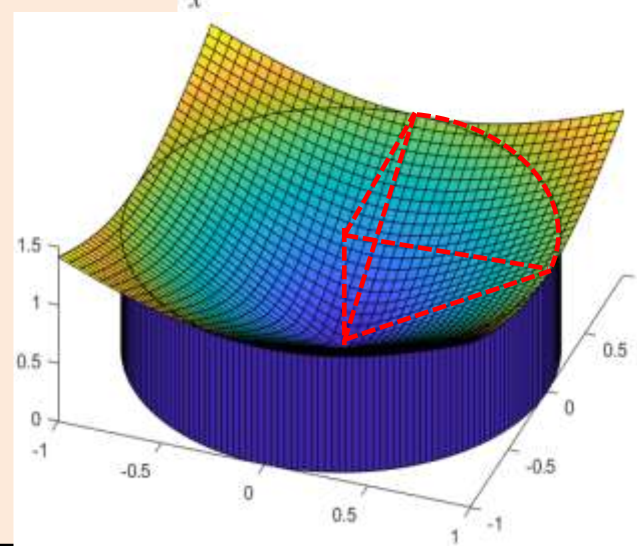


จากโจทย์ สมการของกรวยคือ $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ ดังนั้นจากรูป

$$m = \iiint_D r dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_r^1 r\,(dz\,rdrd\theta)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [r^2 z]_r^1 drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2 - r^3) drd\theta$$

$$= \frac{\pi}{24}$$




```
clear
syms x y z r t
answer = int(int(int(r^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```

Center of Mass (Application)

First Moments: The first moments of the solid

$$M_{xy} = \iiint_D zr\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 zr^2\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{z^2}{2}r^2\Big]_r^1\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2 - r^4)\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{30}.$$

$$M_{xz} = \iiint_D r^2 \sin\theta\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3 \sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 z \sin\theta\Big]_r^1\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^3 - r^4)\sin\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{20}$$

$$M_{yz} = \iiint_D r^2 \cos\theta\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3 \cos\theta\,dz\,dr\,d\theta = \frac{1}{20}.$$

Hence,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38,\quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38,\quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi/30}{\pi/24} \approx 0.8$$

The center of mass has the approximate coordinates (0.38, 0.38, 0.8).

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{xz} = \iiint_D y\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x,y,z)\,dV$$

```
clear
syms x y z r t
Mxy = int(int(int(z*r^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
Mxz = int(int(int(sin(t)*r^3,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
Myz = int(int(int(cos(t)*r^3,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```

Center of Mass (Application)

Second moments, or Moments of Inertia

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,dV.$$

$$I_x = \iiint_D (r^2 \sin^2\theta + z^2) r^2 dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 (r^4 \sin^2\theta + r^2 z^2) dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(z r^4 \sin^2\theta + \frac{r^2 z^3}{3}\right)\Bigg]_r^1 dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left\{(r^4 - r^5)\sin^2\theta + \left(\frac{r^2}{3} - \frac{r^5}{3}\right)\right\} dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6}\right)\sin^2\theta + \left(\frac{r^3}{9} - \frac{r^6}{18}\right)\right)\Bigg]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{1}{30}\right)\sin^2\theta + \frac{1}{18}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) + \frac{1}{18}\right) d\theta = \left(\left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right) + \frac{\theta}{18}\right)\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{120} + \frac{\pi}{36} = \frac{13\pi}{360}$$

```
clear
syms x y z r t
Ix = int(int(int(r^4*sin(t)^2+r^2*z^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```

Center of Mass (Application)

Second moments, or Moments of Inertia

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

$$I_y = \iiint_D (r^2\cos^2\theta + z^2) r^2 dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 (r^4\cos^2\theta + r^2 z^2) dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(zr^4\cos^2\theta + \frac{r^2 z^3}{3}\right)\Bigg]_r^1 dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left\{(r^4 - r^5)\cos^2\theta + \left(\frac{r^2}{3} - \frac{r^5}{3}\right)\right\} dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{r^3}{9} - \frac{r^6}{18}\right)\right)\Bigg]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{1}{30}\right)\cos^2\theta + \frac{1}{18}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) + \frac{1}{18}\right) d\theta = \left(\left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right) + \frac{\theta}{18}\right)\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{120} + \frac{\pi}{36} = \frac{13\pi}{360}$$

```
clear
syms x y z r t
Iy = int(int(int(r^4*cos(t)^2+r^2*z^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```

Center of Mass (Application)

Second moments, or Moments of Inertia

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

$$I_z = \iiint_D (r^2 \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta) r^2 dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^4 dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (zr^4)]_r^1\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^4 - r^5)\, dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{30} d\theta = \frac{\pi}{60}$$

```
clear
syms x y z r t
Iz = int(int(int((r^2*cos(t)^2+r^2*sin(t)^2)*r^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```

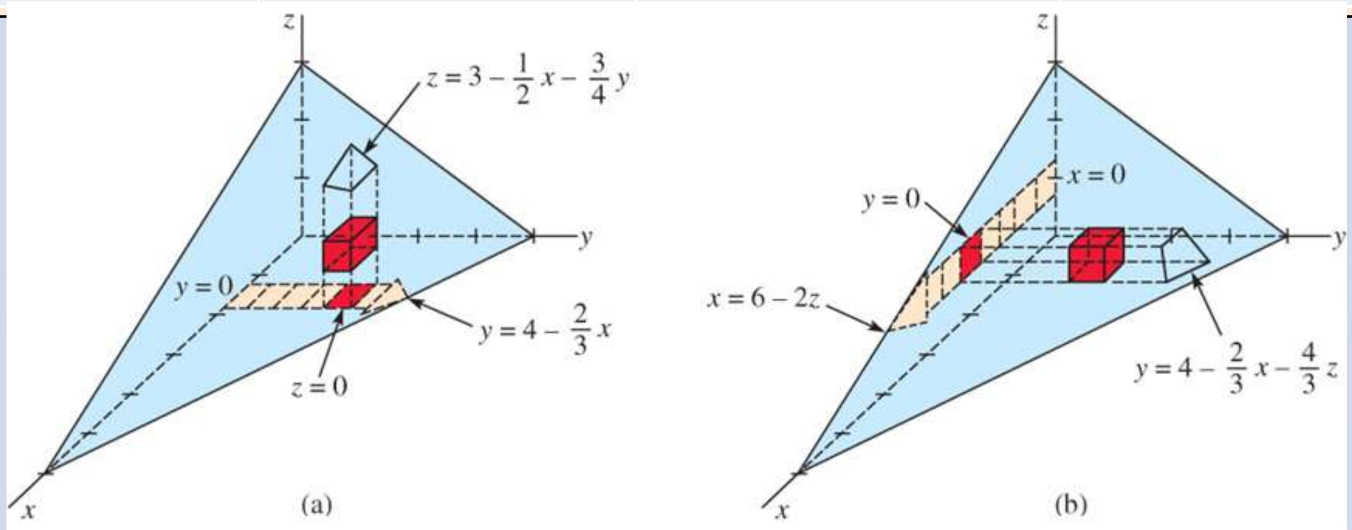
Changing the Order of Integration (การเปลี่ยนลำดับของการอินทิกรัล)

$$\int_0^6 \int_0^{(4-\frac{2x}{3})} \int_0^{(3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4})} F(x,y,z)dzdydx \quad \Rightarrow \quad dydxdz$$

ตามรูปด้านล่าง บริเวณ D เป็นส่วนที่อยู่ในออกแตนท์ที่ 1 ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยระนาบของโคออดิเนททั้งหมด 3 ระนาบ และระนาบสุดท้ายคือ $2x + 3y + 4z = 12$ จากรูป (b) และ ตารางสรุปได้ว่า

$$\int_0^6 \int_0^{(4-\frac{2x}{3})} \int_0^{(3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4})} F(x,y,z)dzdydx = \int_0^3 \int_0^{(6-2z)} \int_0^{(4-\frac{2x}{3}-\frac{4z}{3})} F(x,y,z)\, dydx\, dz$$

Order of Integration	First Integration	Second Integration	Third Integration
$dzdydx$	0 ถึง $3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}$	0 ถึง $4-\frac{2x}{3}$	0 ถึง 6
$dydxdz$	0 ถึง $4-\frac{2x}{3}-\frac{4z}{3}$	0 ถึง $6-2z$	0 ถึง 3



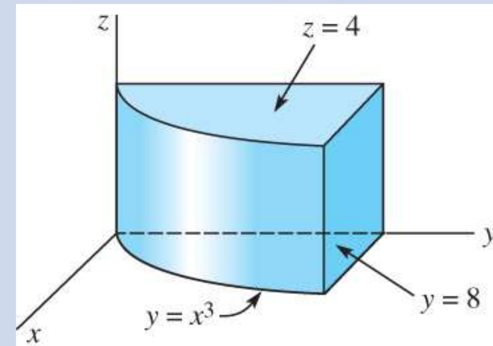
<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงการหา ลำดับของการอินทิกรัลปริมาตรของรูปที่กำหนดให้

$$\iiint_V dzdydx = \int_0^2\int_{x^3}^8\int_0^4 dzdydx = 48$$

$$\iiint_V dxdzdy = \int_0^8\int_0^4\int_0^{y^{\frac{1}{3}}} dxdzdy = 48$$

$$\iiint_V dydxdz = \int_0^4\int_0^2\int_{x^3}^8 dydxdz = 48$$

```
clear
syms x y z
answer1 = int(int(int(1,z,0,4),y,x^3,8),x,0,2)
answer2 = int(int(int(1,x,0,y^(1/3)),z,0,4),y,0,8)
answer3 = int(int(int(1,y,x^3,8),x,0,2),z,0,4)
```

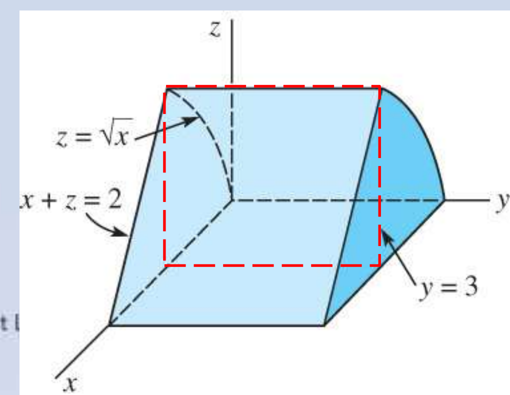


$$\iiint_V dxdzdy = \int_0^3\int_0^1\int_{z^2}^{2-z} dxdzdy = \frac{21}{6}$$

$$\iiint_V dydxdz = \int_0^1\int_{z^2}^{2-z}\int_0^3 dydxdz = \frac{21}{6}$$

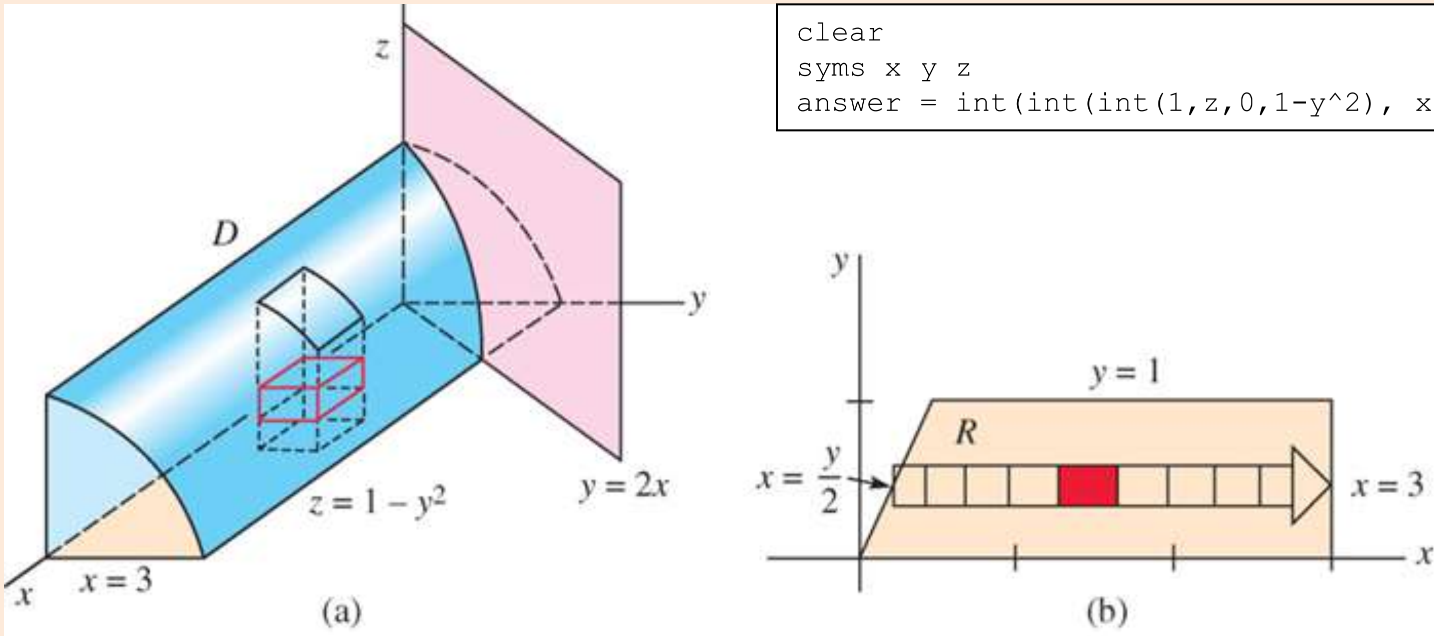
$$\iiint_V dzdxdy = \int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} dzdxdy + \int_0^3\int_1^2\int_0^{2-x} dzdxdy = \frac{21}{6}$$

```
clear
syms x y z
answer1 = int(int(int(1,x,z^2,2-z),z,0,1),y,0,3)
answer2 = int(int(int(1,y,0,3),x,z^2,2-z),z,0,1)
answer3 = int(int(int(1,z,0,x^0.5),x,0,1),y,0,3)+...
    int(int(int(1,z,0,2-x),x,1,2),y,0,3)
```



ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของรูปทรงที่อยู่ในออกแตนท์ที่ 1 ซึ่งถูกจำกัดขอบเขตด้วย $z = 1 - y^2, y = 2x,$ และ $x = 3$

```
clear
syms x y z
answer = int(int(int(1,z,0,1-y^2), x,  y/2,3),y,0,1)
```



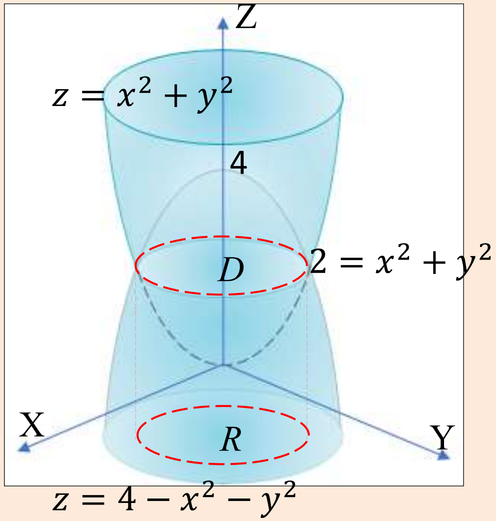
ระนาบ xy ในรูป คือบริเวณของ Type II ดังนั้น เราอินทิกรัลเทียบกับ x จาก $\frac{y}{2}$ ถึง 3 ในส่วนการอินทิกรัลขั้นสุดท้ายเทียบกับ y จาก 0 ถึง 1 ดังนั้น

$$V = \iiint_D dV = \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^{3} \int_0^{(1-y^2)} dz\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^{3} (1 - y^2)dx\,dy = \int_0^1 [x - xy^2\,]_{y/2}^{3} dy$$

$$= \int_0^1 (3 - 3y^2 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{2})dy = \left[3y - y^3 - \frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{8}\right]_0^1 = 3 - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาปริมาตรที่เกิดจากการตัดกันของพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ และ $z = 4 - x^2 - y^2$

1. อินทิกรัลทั่วบริเวณ D, ลำดับแรกเราอินทิกรัลเทียบกับ z ดังนั้น
2. ให้ x และ y อยู่คงที่, เพิ่มค่า z เราจะได้เส้นตามแนวตั้ง
3. ใส่ค่าลิมิตของการอินทิกรัลที่เหลือ (ใน xy-coordinates หรือ polar coordinates) ดังนั้นคือการรวมทุกเส้นในแนวตั้งที่ตัดกับบริเวณ D. นั่นหมายความว่าคุณทำ double integral ทั่วบริเวณ R ในระนาบ xy (โดยที่ D ถูกฉายลงมาบนระนาบ xy)



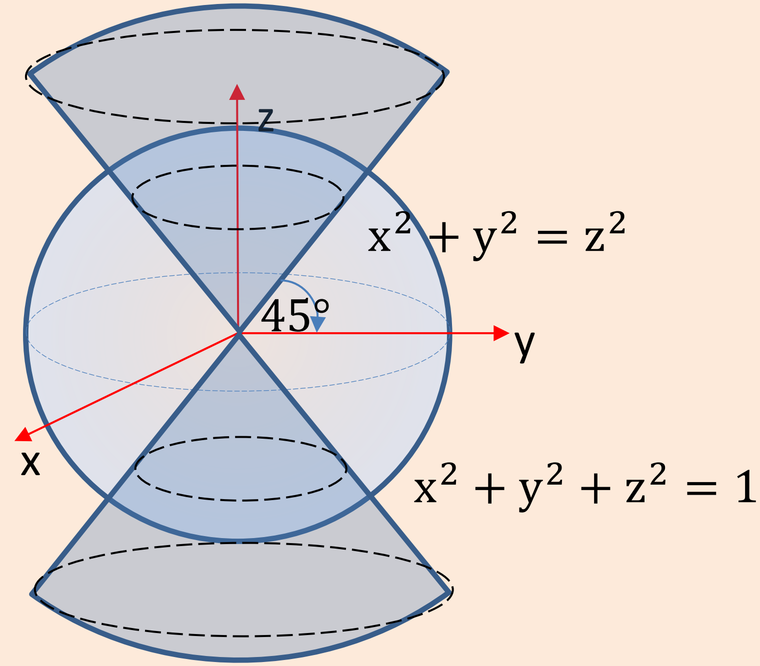
$$V = \iiint_D dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{4-r^2} dz\,r dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [z]_{r^2}^{4-r^2}\, r dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2r^2)\,r dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = 4\pi$$

```
clear
syms x y z
answer = int(int(int(1,...
    z,x^2+y^2,4-x^2-y^2),...
    x,-sqrt(2-y^2),sqrt(2-y^2)),...
    y,-sqrt(2),sqrt(2))
```

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรที่อยู่ภายใน $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ แต่อยู่ภายนอกทรงกรวย $x^2 + y^2 = z^2$



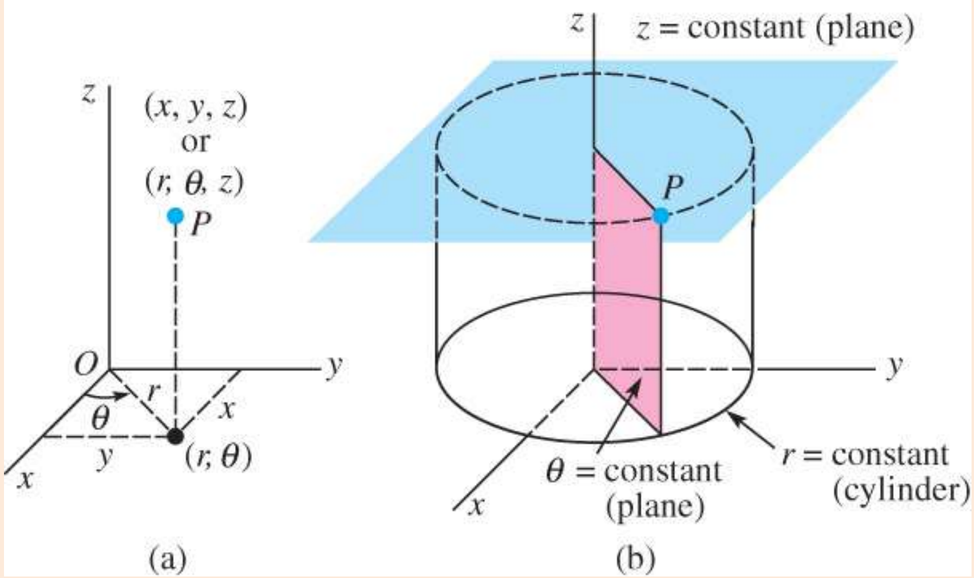
$$V = \iiint_D dV = 2\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2\pi) \ = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

```
clear
syms rho phi theta
answer = 2*int(int(int(rho^2*sin(phi),rho,0,1),phi,pi/4,pi/2),theta,0,2*pi)
```

Cylindrical Coordinates (พิกัดทรงกระบอก)

Cylindrical coordinate system เป็นการรวม พิกัดขั้ว (polar) ของจุดบนระนาบ xy กับพิกัดฉากเฉพาะแกน z ดังแสดงในรูป พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate)ของจุด P ถูกแสดงโดย (r, θ, z)



<u>การแปลงพิกัดทรงกระบอก ⟹พิกัดฉาก</u>

จากรูปด้านบน พิกัดฉาก (x, y, z) ของจุด P สามารถหาได้จากพิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) โดย

$$\boxed{x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z}$$

<u>การแปลงพิกัดฉาก ⟹พิกัดทรงกระบอก</u>

พิกัดฉาก (x, y, z) แปลงไปเป็น พิกัดทรงกระบอก $(r, \theta, z))$ โดย

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, z = z}$$

Cylindrical Coordinates (พิกัดทรงกระบอก)

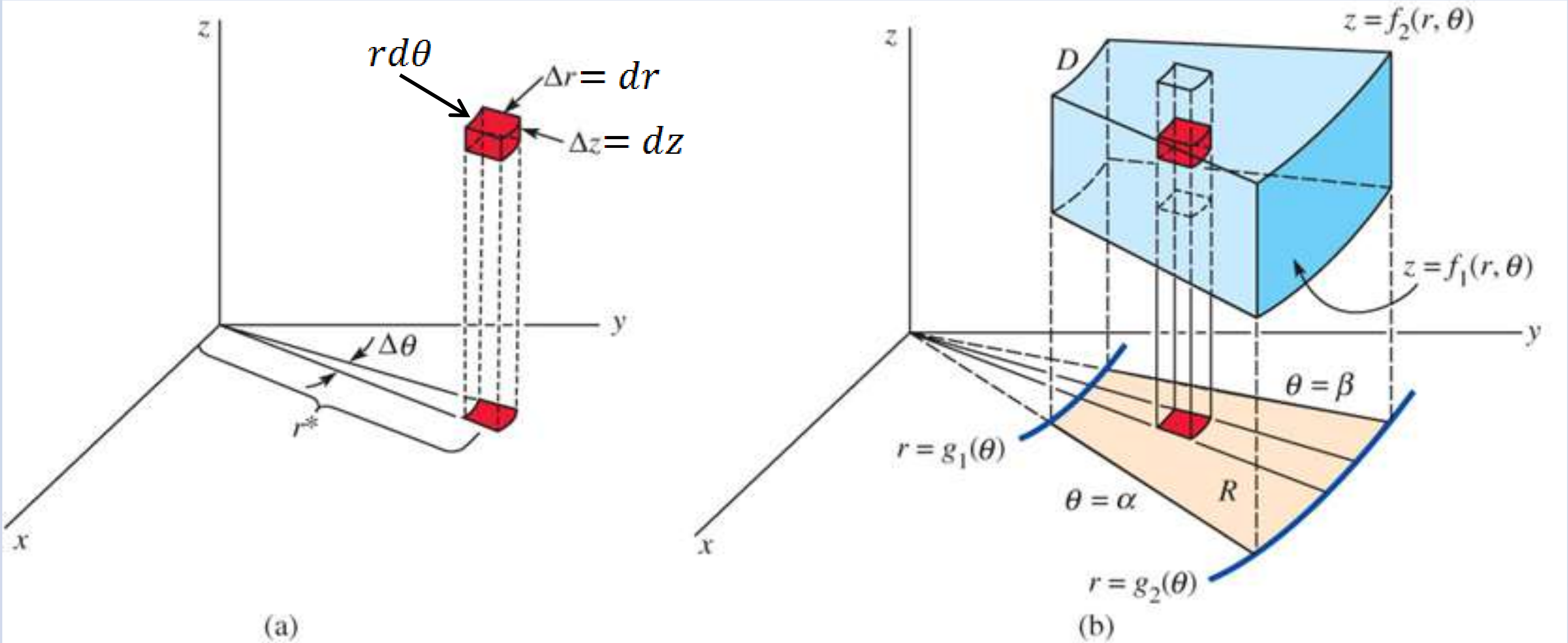
<u>ตัวอย่าง</u>

จงแปลง $\left(8, \frac{\pi}{3}, 7\right) = (r, \theta, z)$ พิกัดทรงกระบอก $\Longrightarrow (x, y, z)$ พิกัดฉาก

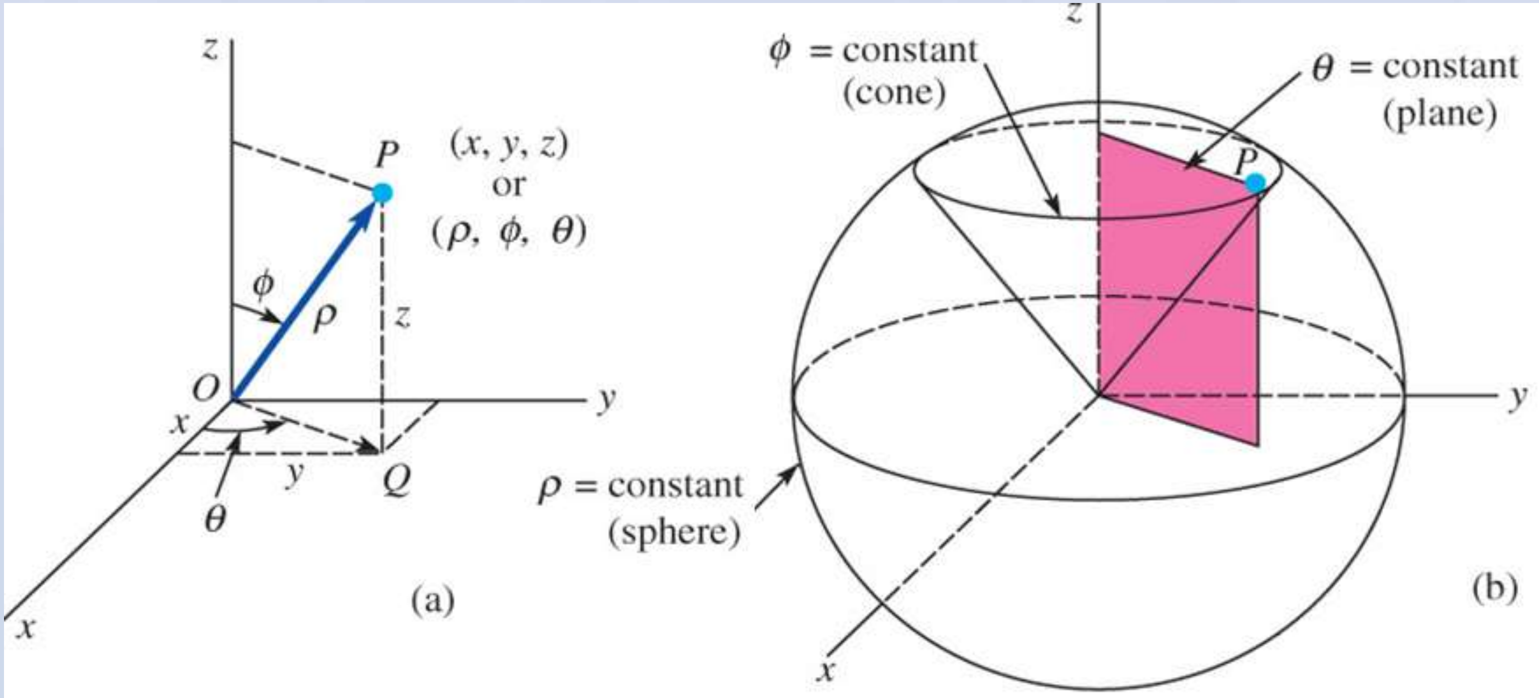
ดังนั้น $(8, \frac{\pi}{3}, 7) \Longrightarrow (\underbrace{4}_{rcos\theta}, \underbrace{4\sqrt{3}}_{rsin\theta}, \underbrace{7}_{z})$ ในพิกัดฉาก

Triple Integrals Cylindrical Coordinates
(อินทิกรัลสามชั้นในพิกัดทรงกระบอก)

$$\iiint_D F(r,\theta,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r,\theta,z)dz \right) dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r,\theta,z) r\,dz\,dr\,d\theta$$



Spherical Coordinates (พิกัดทรงกลม)



<u>การแปลงพิกัดทรงกลม $\Longrightarrow$พิกัดฉาก</u>

พิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) แปลงไปเป็น พิกัดฉาก (x, y, z) โดย

$x = \|\overrightarrow{OQ}\| \cos\theta$, $y = \|\overrightarrow{OQ}\| \sin\theta$, $z = \|\overrightarrow{OP}\| \cos\phi$ และจากรูป $\|\overrightarrow{OQ}\| = \rho \sin\phi$

$$\boxed{x = \rho \sin\phi \cos\theta , y = \rho \sin\phi \sin\theta , z = \rho \cos\phi}$$

<u>การแปลงพิกัดทรงกลม $\Longrightarrow$พิกัดทรงกระบอก</u>

พิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) แปลงไปเป็น พิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) โดย

$$r = \rho \sin\phi , \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho \cos\phi$$

Converting Coordinates (การแปลงพิกัด)

ตัวอย่าง

จงแปลง $(6,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})=(\rho,\phi,\theta)$ พิกัดทรงกลม $\Longrightarrow$ พิกัดฉาก (x,y,z)

และ พิกัดทรงกลม $\Longrightarrow$ พิกัดทรงกระบอก (r,θ,z)

$$\rho = 6, \phi = \frac{\pi}{4}, \text{และ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

ดังนั้น $(6,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}) \Longrightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{2},3\sqrt{2}\right)$ ในพิกัดฉาก

$(6,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}) \Longrightarrow (3\sqrt{2},\frac{\pi}{3},3\sqrt{2})$ ในพิกัดทรงกระบอก

Converting Coordinates (การแปลงพิกัด)

การแปลงพิกัดฉาก ⟹พิกัดทรงกลม

พิกัดพิกัดฉาก (x, y, z) แปลงไปเป็นทรงกลม (ρ, ϕ, θ) โดย

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \phi = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

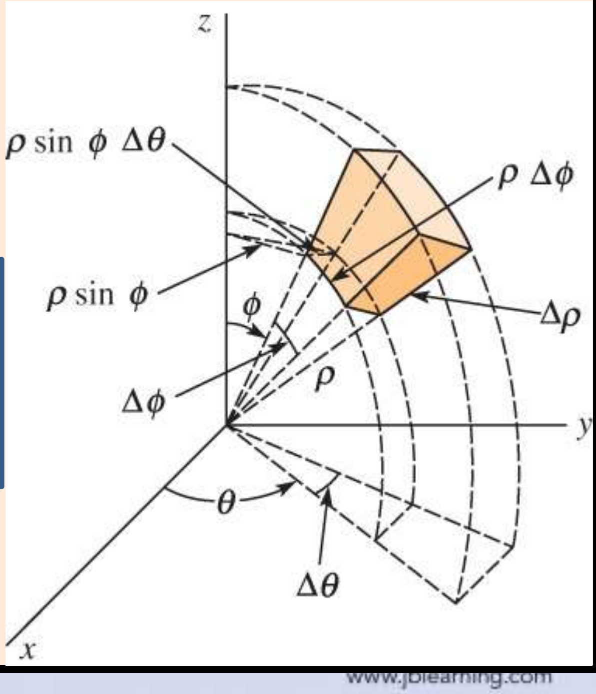
การอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม (Triple Integrals in Spherical Coordinates)

จากรูป ปริมาตรรูปลิ่มในระบบพิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) ประมาณค่าได้เป็น

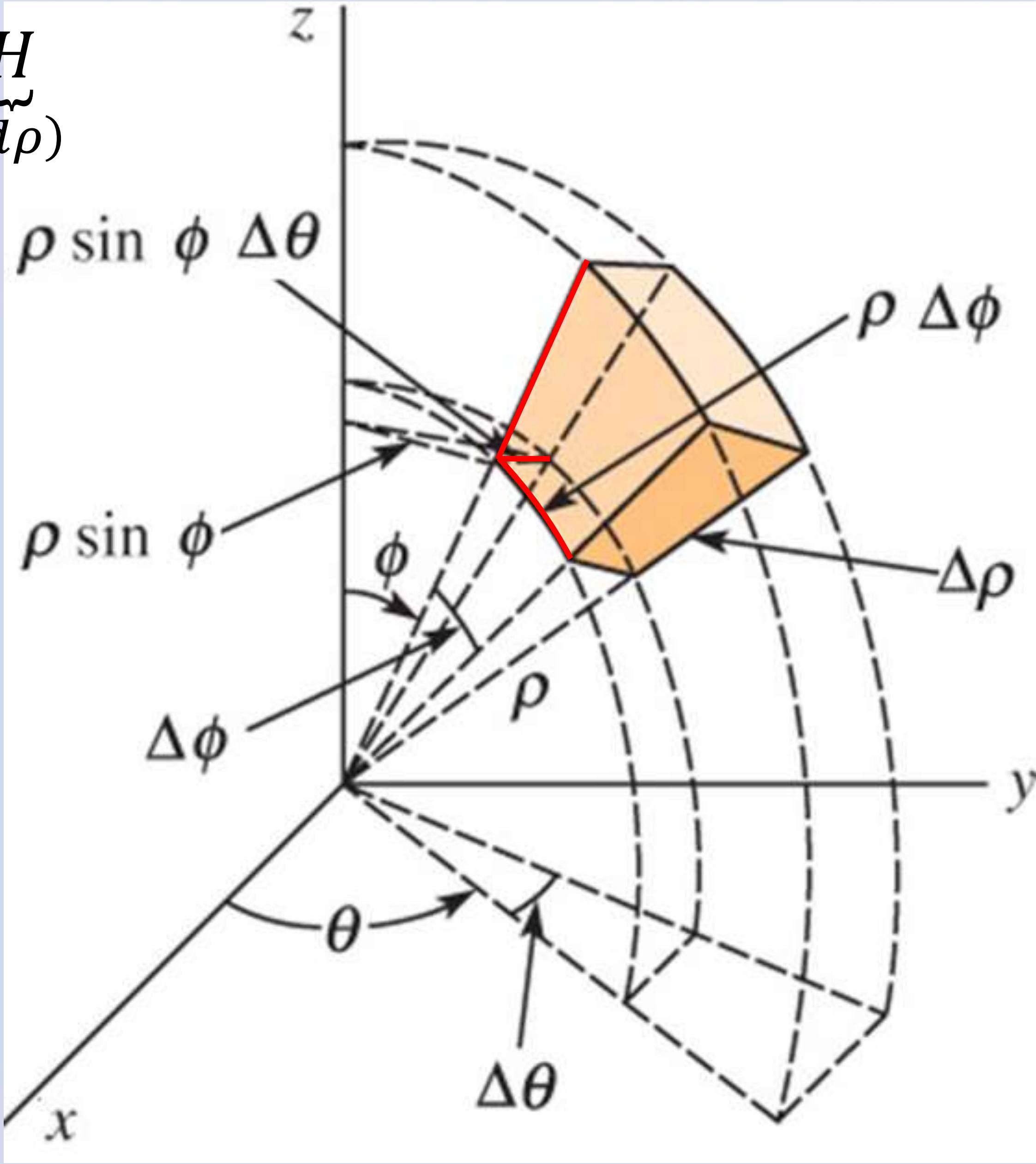
$$dV = W \times L \times H = d\rho \times \rho d\phi \times \rho \sin\phi \, d\theta = \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$$

โดยทั่วไป การอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม จะอยู่ในรูป

$$\iiint_D F(\rho, \phi, \theta) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(\phi,\theta)}^{f_2(\phi,\theta)} F(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$$



$$dV = \underbrace{W}_{(\rho d\phi)} \times \underbrace{L}_{(\rho \sin\phi d\theta)} \times \underbrace{H}_{(d\rho)}$$



Ex. Volume of Sphere with Radius **R**

```
import sympy as sp

# Define symbolic variables
rho, phi, theta, R = symbols('rho phi theta R')

# Define the integral
integral =
sp.integrate(sp.integrate(sp.integrate
(rho**2 * sp.sin(phi), (rho, 0, R)),
        (phi, 0, sp.pi)), (theta, 0,
2*sp.pi))
integral
```

Divergence (ไดเวอร์เจนซ์)

ถ้าสนามเว็คเตอร์ใน 3 มิติ $\mathbf{F}(x,y,z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ แล้วไดเวอร์เจนซ์ของ $\mathbf{F}$ คือ

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\mathbf{k}$, $\mathbf{F}(x,y,z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ดังนั้น $\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

EXAMPLE If $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, find div $\mathbf{F}$.

Divergence Theorem (ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์)

- **ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ มีประโยชน์ในการหาที่มาของสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและสมการไฮโดรไดนามิกส์(การไหลของของเหลว)**

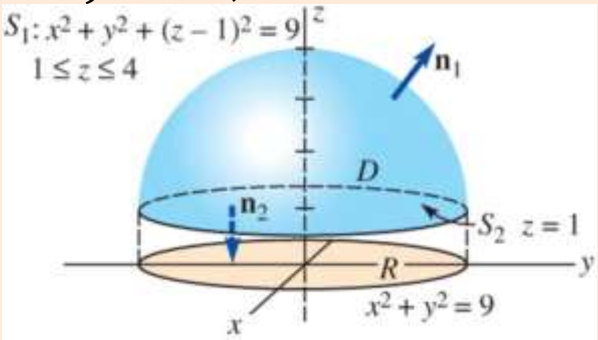
Theorem 9.16.1 Divergence Theorem

ให้ D เป็นบริเวณปิดและถูกปิดล้อมใน 3 มิติ ด้วยขอบเขตเรียบต่อเนื่องเป็นช่วง S ซึ่งมีทิศพุ่งออก ให้ $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ เป็นสนามเว็คเตอร์ซึ่ง P, Q, R ต่อเนื่องและอนุพันธ์ย่อยของพวกมันก็ต่อเนื่องด้วย ในบริเวณที่เป็น D ดังนั้น

$$\iint_S (\mathbf{F}.\mathbf{n})\, dS = \iiint \mathrm{div}\, \mathbf{F}\, dV$$

โดยที่ n คือเว็คเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว S

ตัวอย่าง กำหนดให้ D เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยครึ่งทรงกลม $x^2+y^2+(z-1)^2=9, 1\le z\le 4$ และระนาบ $z=1$ จงพิสูจน์ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ถ้า $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-1)\mathbf{k}$



Triple Integral จากสูตรเรารู้ว่า div F=3 ดังนั้น

$$\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV=\iiint_D 3dV=54\pi$$

Surface Integral เราสามารถเขียนได้ว่า $\iint_S = \iint_{S_1}+\iint_{S_2}$ โดย S_1 คือครึ่งทรงกลม และ S_2 คือระนาบ $z=1$ ถ้า S_1 คือ surface ของ $\mathrm{g}(x,y,z)=x^2+y^2+(z-1)^2-9$ ดังนั้น เวคเตอร์หน่วยที่พุ่งออกคือ

$$\mathrm{n}=\frac{\nabla \mathrm{g}}{\|\nabla \mathrm{g}\|}=\frac{2x\mathrm{i}+2y\mathrm{j}+2(\mathrm{z}-1)\mathrm{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4(z-1)^2}}=\frac{x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+(\mathrm{z}-1)\mathrm{k}}{3}$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}+\frac{(z-1)^2}{3}=\frac{9}{3}=3$$

เนื่องจาก $z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}+1$ ดังนั้น $f_x=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ และ $f_y=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\boldsymbol{S}=\iint_R 3\left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)dA=9\int_0^{2\pi}\int_0^3(9-r^2)^{-1/2}r\,dr\,d\theta=54\pi$$

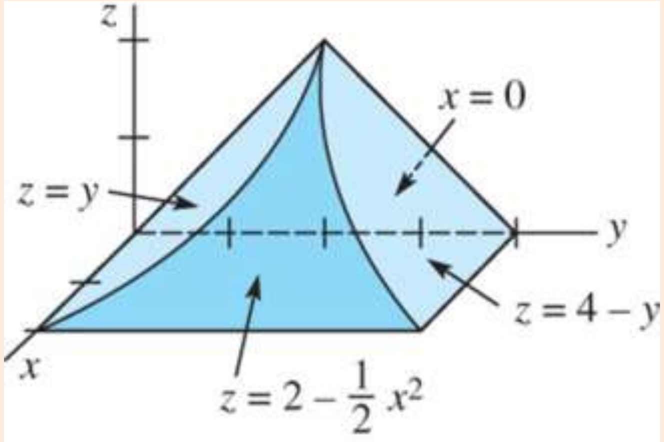
สำหรับ S_2 เวคเตอร์หน่วยที่พุ่งออกคือ $\mathrm{n}=-\mathrm{k}$ ดังนั้น $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=-z+1$ แต่เนื่องจากที่ระนาบนี้มีค่า $z=1$ ดังนั้น

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=-z+1=-1+1=0$$

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\boldsymbol{S}=54\pi+0=54\pi$$

```
clear
syms x y z
field = [x y z-1];
vars = [x y z];
answer1 = int(int(int(divergence(field,vars),...
    z,-sqrt(9-x.^2-y.^2),sqrt(9-x.^2-y.^2)),...
    y,-sqrt(9-x.^2),sqrt(9-x.^2)),x,0,3)
```

<u>ตัวอย่าง</u> จงใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ หาค่าฟลักซ์ที่พุ่งออก $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS$ ของสนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 5y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ เมื่อ D คือบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยสมการ $z = y, z = 4 - y, z = 2 - \frac{1}{2}x^2, x = 0$ และ $z = 0$



$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 2z + 10y - 2z$$

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} \int_z^{4-z} 10y\,dy\,dz\,dx = \int_0^2 \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} 5[(4-z)^2 - z^2]\,dz\,dx = \int_0^2 \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} (80 - 40z)\,dz\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(80(2 - \frac{1}{2}x^2) - 20(2 - \frac{1}{2}x^2)^2\right) dx = \int_0^2 80 - 5x^4\,dx = 80x - x^5\Big|_0^2 = 128$$

Change of Variables in Multiple Integrals
(การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลหลายชั้น)

ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องในช่วง $[a, b], x = g(u)$ มีอนุพันธ์ที่ต่อเนื่อง แล้ว $dx = g'(u)du$ ดังนั้น

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\big(g(u)\big)g'(u)du$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\big(g(u)\big)J(u)du$$

$$J(u) = \frac{dx}{du}$$

Change of Variables in Multiple Integrals
(การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลหลายชั้น)

- บางครั้ง การเปลี่ยนตัวแปรของอินทิกรัลจำกัดเขตเพื่อที่จะหาค่าของมัน มีความจำเป็น (เพื่อทำอินทิแกรนด์ หรือบริเวณที่จะอินทิเกรทให้อยู่ในรูปแบบที่ง่าย)

Theorem 9.17.1 Change of Variables in a Double Integral

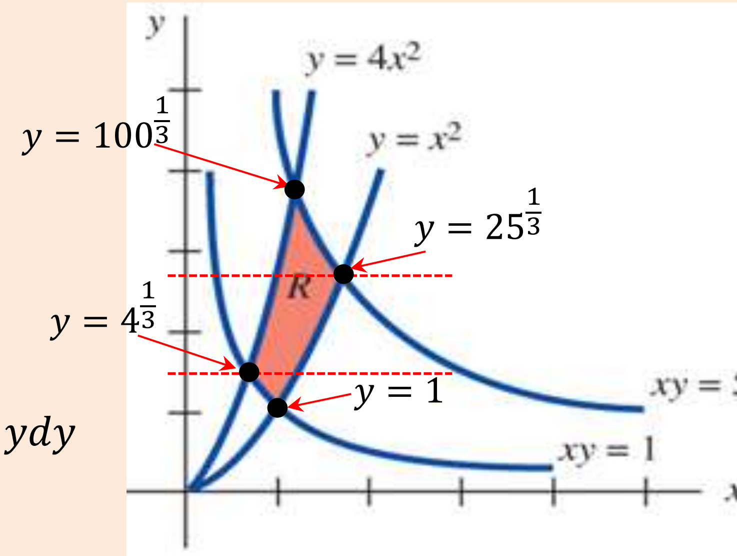
If F is continuous on R, then

$$\iint_R F(x, y)\, dA = \iint_S F(f(u, v), g(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dA'. \tag{11}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\iint_R xy\,dA$ บริเวณ R ที่แสดงในรูป



$$\int_{1}^{4^{\frac{1}{3}}}\int_{\frac{1}{y}}^{\sqrt{y}} xydx\,dy + \int_{4^{\frac{1}{3}}}^{25^{\frac{1}{3}}}\int_{\sqrt{\frac{y}{4}}}^{\sqrt{y}} xydx\,dy + \int_{25^{\frac{1}{3}}}^{100^{\frac{1}{3}}}\int_{\sqrt{\frac{y}{4}}}^{\frac{5}{y}} xydx\,dy$$

$$\int_{1}^{4^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y^2}\right)ydy + \int_{4^{\frac{1}{3}}}^{25^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{2}\left(y-\frac{y}{4}\right)ydy + \int_{25^{\frac{1}{3}}}^{100^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{2}\left(\frac{25}{y^2}-\frac{y}{4}\right)ydy$$

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{4^{\frac{1}{3}}} \left(y^2-\frac{1}{y}\right)dy + \frac{1}{2}\int_{4^{\frac{1}{3}}}^{25^{\frac{1}{3}}} \left(y^2-\frac{y^2}{4}\right)dy + \frac{1}{2}\int_{25^{\frac{1}{3}}}^{100^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{25}{y}-\frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}-\ln y\right]_{1}^{4^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^3}{12}\right]_{4^{\frac{1}{3}}}^{25^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2}\left[25\ln y-\frac{y^3}{12}\right]_{25^{\frac{1}{3}}}^{100^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\ln 4-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{25}{3}-\frac{25}{12}-\frac{4}{3}+\frac{4}{12}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{25}{3}\ln 100-\frac{100}{12}-\frac{25}{3}\ln 25+\frac{25}{12}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\ln 4\right) + \left(\frac{21}{8}\right) + \left(\frac{25}{6}\ln 4-\frac{25}{8}\right) = 4\ln 4$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า $\iint_R xy\,dA$ เหนือบริเวณ R ที่แสดงในรูป

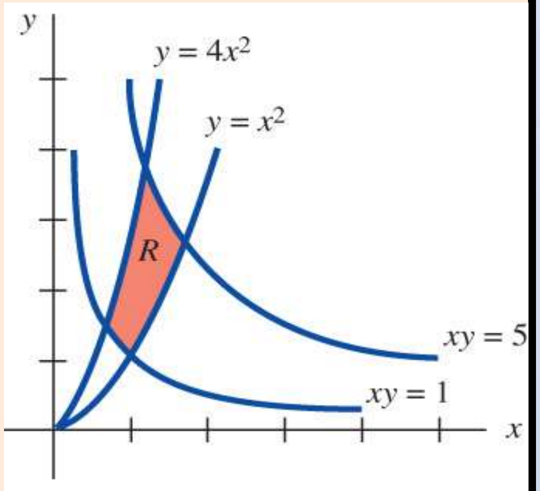
$$\iint_R F(x,y)\,dA = \iint_S F(f(u,v),g(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA'$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

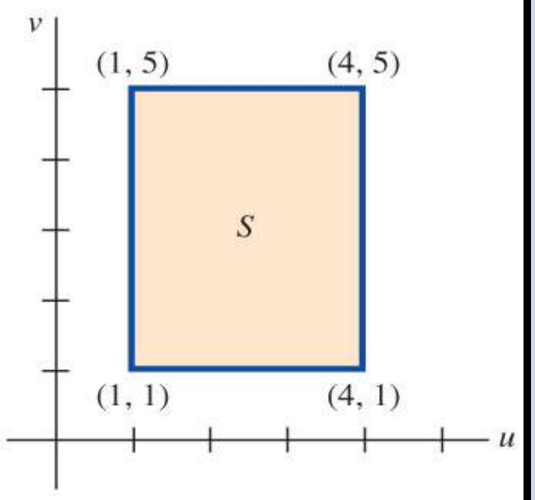
$u = \dfrac{y}{x^2}$, $\quad v = xy \qquad\qquad u = 1$ ถึง 4 $\;, v = 1$ ถึง 5

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \left|-\frac{2y}{x^2} - \frac{y}{x^2}\right| = \left|-\frac{3y}{x^2}\right|$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|-\frac{x^2}{3y}\right| = \left|-\frac{1}{3u}\right| = \frac{1}{3u}$$



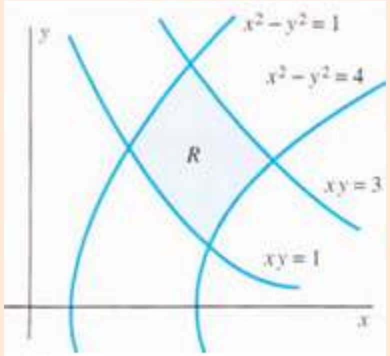
(a)

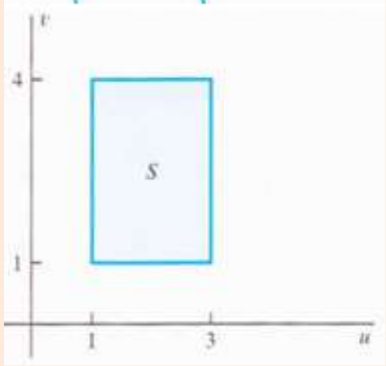


(b)

$$\iint_R xy\,dA = \iint_S v\left(\left|-\frac{1}{3u}\right|\right) du\,dv = \int_1^5\int_1^4 \left(\frac{v}{3u}\right) du\,dv = 4\ln 4$$

ตัวอย่าง สมมุติว่า R คือระนาบที่ถูกปิดล้อมด้วย ไฮเพอร์โบลา $xy = 1,\ xy = 3$ และ $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4$ จงหาค่า $\iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy$





$$u = xy, \qquad v = x^2 - y^2$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

$u = xy, \qquad v = x^2 - y^2 \qquad u = 1$ ถึง 3 $, v = 1$ ถึง 4

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = |-2y^2 - 2x^2|$$

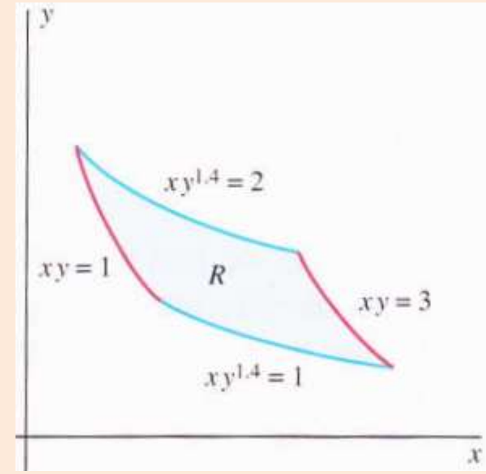
$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \left|-\frac{1}{2y^2 + 2x^2}\right| = \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + y^2}$$

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_S (x^2 + y^2)\left(\frac{\frac{1}{2}}{x^2 + y^2}\right) dudv = \frac{1}{2}\int_1^4 \int_1^3 du\, dv = 3$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของ R ที่ถูกปิดล้อมด้วยไฮเพอร์โบลา $xy = 1, xy = 3$ และ $xy^{1.4} = 1, xy^{1.4} = 2$

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^{1.4} & 1.4xy^{0.4} \end{vmatrix} = 1.4xy^{1.4} - xy^{1.4} = 0.4xy^{1.4}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \frac{1}{0.4xy^{1.4}} = \frac{2.5}{v}$$



$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

$u = xy, \qquad v = xy^{1.4} \qquad\qquad u = 1$ ถึง 3 $, v = 1$ ถึง 2

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^{1.4} & 1.4xy^{0.4} \end{vmatrix} = 1.4xy^{1.4} - xy^{1.4} = 0.4xy^{1.4}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \frac{1}{0.4xy^{1.4}} = \frac{2.5}{v}$$

$$\iint\limits_R dxdy = \iint\limits_S \frac{2.5}{v}dudv = 2.5\int_1^3\int_1^2 \frac{1}{v}dv\,du = 5\ln 2$$