ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

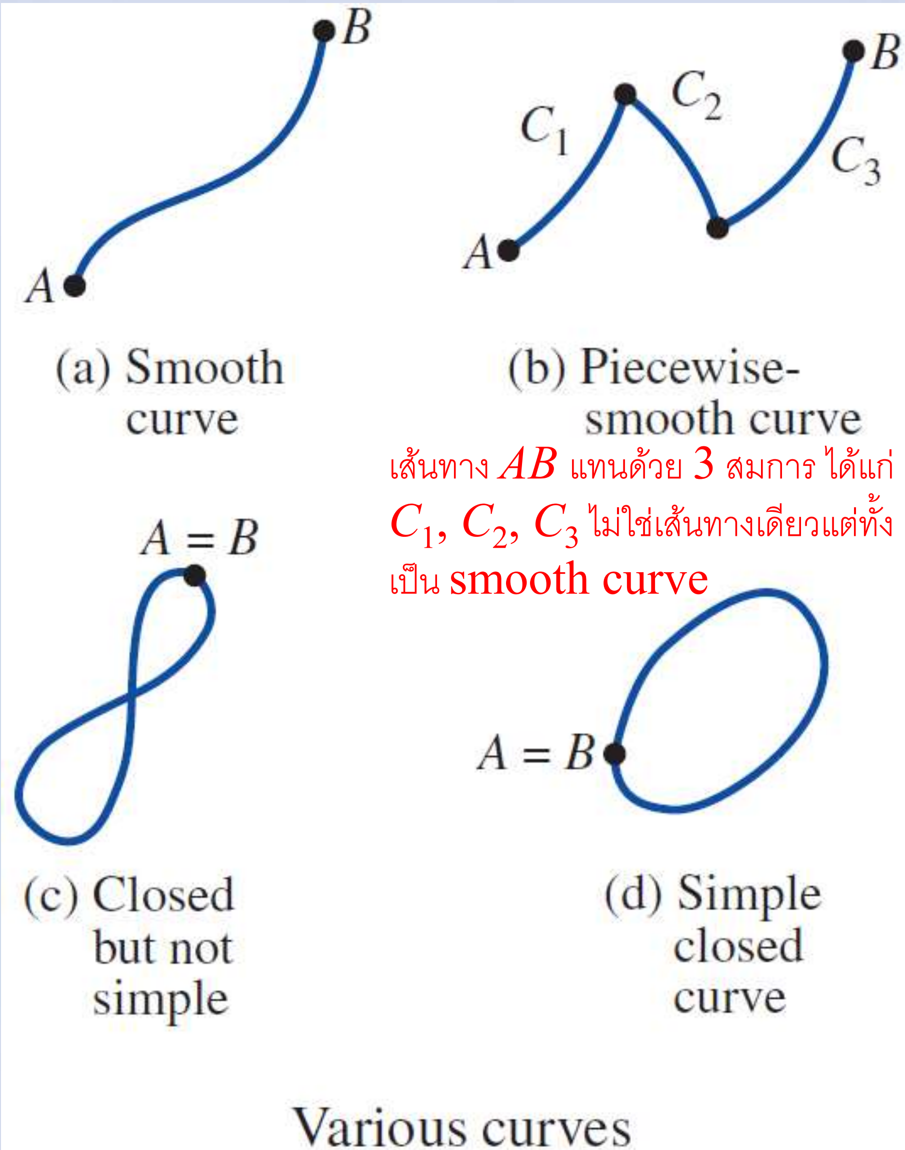
Chapter 9

Lecture2-Vector Calculus Part3

Assoc. Prof. Dr. Santhad Chuwongin

Outline

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)



เส้นทาง AB แทนด้วย 3 สมการ ได้แก่ C_1, C_2, C_3 ไม่ใช่เส้นทางเดียวแต่ทั้ง 3 เป็น smooth curve

- Line Integral that is similar to a single integral except that instead of integrating over an interval [a, b], we integrate over a curve C.
- Although "curve integrals" would be better terminology.
- They were invented in the early 19th century to solve problems involving fluid flow, forces, electricity, and magnetism.

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

Definition 9.8.1 Line Integrals in the Plane

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีสองตัวแปรคือ x, y และทั้ง x, y ถูกกำหนดให้อยู่ในบริเวณเดียวกับระนาบที่เส้นโค้งเรียบ C อยู่

(*i*) The **line integral of** f **along** C **from** A **to** B **with respect to** x is

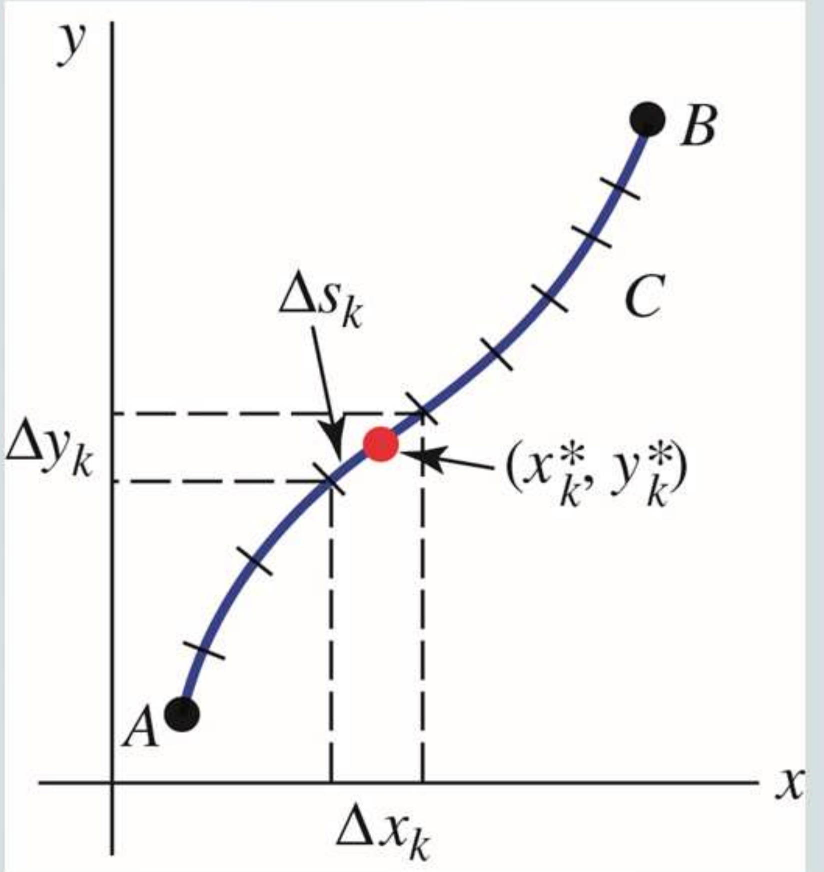
$$\int_C f(x, y)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k.$$

(*ii*) The **line integral of** f **along** C **from** A **to** B **with respect to** y is

$$\int_C f(x, y)\,dy = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k.$$

(*iii*) The **line integral of** f **along** C **from** A **to** B **with respect to arc length** is

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta s_k.$$



Let $\|P\|$ be the **norm** of the partition or the length of the longest subarc.

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

ถ้า C เป็นส่วนโค้งเรียบ (smooth curve : [หมายความว่า $\mathbf{r}'(t)$ ต่อเนื่องและ $\mathbf{r}'(t)\neq 0$])ที่ถูกพารามิเตอร์ด้วย $x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$ หรือด้วยสมการเว็คเตอร์ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ดังนั้นค่าอนุพันธ์ (differential) ของ $dx, dy,$ และ ds ด้วย $x'(t)dt, y'(t)dt$ และ $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$ โดยพจน์ $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$ ถูกเรียกว่า ค่าอนุพันธ์ของความยาวส่วนโค้ง (differential of arc length) การอินทิเกรทเทียบกับตัวแปร t แสดงดังต่อไปนี้

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt$$

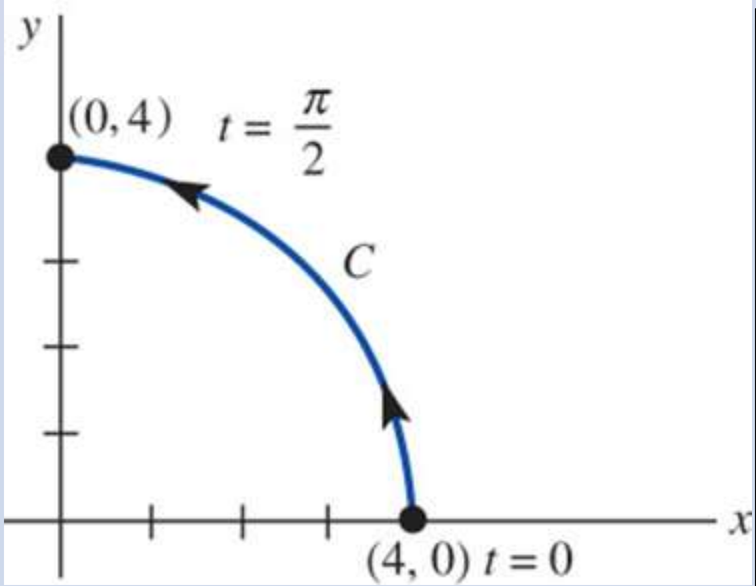
$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)y'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

จงหาค่า (a) $\int_C xy^2 dx$, (b) $\int_C xy^2 dy$, (c) $\int_C xy^2 ds$

บนควอเตอร์ของวงกลม C โดย $x = 4\,cos(t)\,, y = 4\,sin(t), 0 \leq t \leq \pi/2$




```
import sympy as sp
# Define the symbol and the parameterization
t = sp.symbols('t')
x = 4 * sp.cos(t)
y = 4 * sp.sin(t)

# Define the vector field
F = x * y**2

# Compute the dot products
Fdx = F * sp.diff(x, t)   # F * dx
Fdy = F * sp.diff(y, t)   # F * dy
Fds = F * sp.sqrt(sp.diff(x, t)**2 + sp.diff(y,
t)**2)  # F * ds

# Calculate the integrals
ans1 = sp.integrate(Fdx, (t, 0, sp.pi/2))
ans2 = sp.integrate(Fdy, (t, 0, sp.pi/2))
ans3 = sp.integrate(Fds, (t, 0, sp.pi/2))

ans1, ans2, ans3
```

$Answer$: $a)\ -64$, $b)\ 16\pi$, $c) 256/3$

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

จงหาค่า (a) $\int_C xy^2dx$, (b) $\int_C xy^2dy,$ (c) $\int_C xy^2ds$
บนควอเตอร์ของวงกลม C โดย $x = 4\,cos(t)\,, y = 4\,sin(t), 0 \le t \le \pi/2$

(a) $\displaystyle\int_C xy^2dx = \int_C 4\,cos(t)\,(4\,sin(t))^2(-4\,sin(t))dt = -256\int_C sin^3(t)\,dsin(t) = -64$

(b) $\displaystyle\int_C xy^2dy = \int_C 4\,cos(t)\,(4\,sin(t))^2(4\,cos(t))dt = 64\int_C sin^2(2t)\,dt = 64\int_C \left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt = 16\pi$

(c) $\displaystyle\int_C xy^2ds = \int_C 4\,cos(t)\,(4\,sin(t))^2\sqrt{16sin^2(t)+16cos^2(t)}\,dt = 256\int_C sin^2(t)\,dsin(t) = \frac{256}{3}$

In Problems 1–4, evaluate $\int_C G(x, y)\, dx$, $\int_C G(x, y)\, dy$, and $\int_C G(x, y)\, ds$ on the indicated curve C.

1. $G(x, y) = 2xy$; $x = 5 \cos t$, $y = 5 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/4$
2. $G(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$; $x = 2t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 1$
3. $G(x, y) = 3x^2 + 6y^2$; $y = 2x + 1$, $-1 \leq x \leq 0$
4. $G(x, y) = x^2/y^3$; $2y = 3x^{2/3}$, $1 \leq x \leq 8$

1. $\int_C 2xy\,dx = \int_0^{\pi/4} 2(5\cos t)(5\sin t)(-5\sin t)\,dt = -250\int_0^{\pi/4}\sin^2 t\cos t\,dt = -250\left(\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{125\sqrt{2}}{6}$

$\int_C 2xy\,dy = \int_0^{\pi/4} 2(5\cos t)(5\sin t)(5\cos t)\,dt = 250\int_0^{\pi/4}\cos^2 t\sin t\,dt = 250\left(-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{250}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)= \frac{125}{6}(4-\sqrt{2})$

$\int_C 2xy\,ds = \int_0^{\pi/4} 2(5\cos t)(5\sin t)\sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t}\,dt = 250\int_0^{\pi/4}\sin t\cos t\,dt = 250\left(\frac{1}{2}\sin^2 t\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{125}{2}$

2. $\int_C (x^3+2xy^2+2x)\,dx = \int_0^1 [8t^3+2(2t)(t^4)+2(2t)]2\,dt = 2\int_0^1 (8t^3+4t^5+4t)\,dt = 2\left(2t^4+\frac{2}{3}t^6+2t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{28}{3}$

$\int_C (x^3+2xy^2+2x)\,dy = \int_0^1 [8t^3+2(2t)(t^4)+2(2t)]2t\,dt = 2\int_0^1 (8t^4+4t^6+4t^2)\,dt = 2\left(\frac{8}{5}t^5+\frac{4}{7}t^7+\frac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \frac{736}{105}$

$\int_C (x^3+2xy^2+2x)\,ds = \int_0^1 [8t^3+2(2t)(t^4)+2(2t)]\sqrt{4+4t^2}\,dt = 8\int_0^1 t(1+t^2)^{5/2}\,dt = 8\left(\frac{1}{7}(1+t^2)^{7/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{7}(2^{7/2}-1)$

3. $\int_C (3x^2+6y^2)\,dx = \int_{-1}^0 [3x^2+6(2x+1)^2]\,dx$

$= \int_{-1}^0 (27x^2+24x+6)\,dx = (9x^3+12x^2+6x)\Big|_{-1}^0 = -(-9+12-6) = 3$

$\int_C (3x^2+6y^2)\,dy = \int_{-1}^0 [3x^2+6(2x+1)^2]2\,dx = 6$

$\int_C (3x^2+6y^2)\,ds = \int_{-1}^0 [3x^2+6(2x+1)^2]\sqrt{1+4}\,dx = 3\sqrt{5}$

4. $\int_C \frac{x^2}{y^3}\,dx = \int_1^8 \frac{x^2}{27x^2/8}\,dx = \frac{8}{27}\int_1^8 dx = \frac{56}{27}$

$\int_C \frac{x^2}{y^3}\,dy = \int_1^8 \frac{x^2}{27x^2/8}x^{-1/3}\,dx = \frac{8}{27}\int_1^8 x^{-1/3}\,dx = \frac{4}{9}x^{2/3}\Big|_1^8 = \frac{4}{3}$

$\int_C \frac{x^2}{y^3}\,ds = \int_1^8 \frac{x^2}{27x^2/8}\sqrt{1+x^{-2/3}}\,dx = \frac{8}{27}\int_1^8 x^{-1/3}\sqrt{1+x^{2/3}}\,dx = \frac{8}{27}(1+x^{2/3})^{3/2}\Big|_1^8$

$= \frac{8}{27}(5^{3/2}-2^{3/2})$

In Problems 1–4, evaluate $\int_C G(x, y)\,dx$, $\int_C G(x, y)\,dy$, and $\int_C G(x, y)\,ds$ on the indicated curve C.

1. $G(x, y) = 2xy$; $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$, $0 \le t \le \pi/4$

```
import sympy as sp

# Define the symbol and the parameterization
t = sp.symbols('t')
x = 5 * sp.cos(t)
y = 5 * sp.sin(t)

# Define the vector field
G = 2 * x * y

# Compute the dot products
Gdx = G * sp.diff(x, t)  # F * dx
Gdy = G * sp.diff(y, t)  # F * dy
Gds = G * sp.sqrt(sp.diff(x, t)**2 + sp.diff(y,
t)**2)  # F * ds

# Calculate the integrals
ans1 = sp.integrate(Gdx, (t, 0, sp.pi/4))
ans2 = sp.integrate(Gdy, (t, 0, sp.pi/4))
ans3 = sp.integrate(Gds, (t, 0, sp.pi/4))
ans1, ans2, ans3
```

In Problems 1–4, evaluate $\int_C G(x, y)\, dx$, $\int_C G(x, y)\, dy$, and $\int_C G(x, y)\, ds$ on the indicated curve C.

2. $G(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$; $x = 2t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 1$

```
import sympy as sp

# Define the symbol and the parameterization
t = sp.symbols('t')
x = 2 * t
y = t**2

# Define the vector field
G =  x**3 + 2*x*y**2 + 2*x

# Compute the dot products
Gdx = G * sp.diff(x, t)  # F * dx
Gdy = G * sp.diff(y, t)  # F * dy
Gds = G * sp.sqrt(sp.diff(x, t)**2 + sp.diff(y, t)**2)  # F * ds

# Calculate the integrals
ans1 = sp.integrate(Gdx, (t, 0, 1))
ans2 = sp.integrate(Gdy, (t, 0, 1))
ans3 = sp.integrate(Gds, (t, 0, 1))
ans1, ans2, ans3
```

In Problems 1–4, evaluate $\int_C G(x, y)\,dx$, $\int_C G(x, y)\,dy$, and $\int_C G(x, y)\,ds$ on the indicated curve C.

3. $G(x, y) = 3x^2 + 6y^2$; $y = 2x + 1$, $-1 \le x \le 0$

```
import sympy as sp
# Define the symbol 'x' and parameterize 'y' in terms of 'x'
x = sp.symbols('x')
y = 2*x + 1  # y is defined as a linear function of x

# Define the vector field 'G' in terms of 'x' and 'y'
G = 3*x**2 + 6*y**2  # The vector field G

# Compute the dot products wrt 'x' and 'y'
# F * dx: Differentiate 'x' wrt 'x'
Gdx = G * sp.diff(x, x)

# F * dy: Differentiate 'y' wrt 'x'
Gdy = G * sp.diff(y, x)

# F * ds: Calculate magnitude of differential displacement(dx,dy)and multiply by F
Gds = G * sp.sqrt(sp.diff(x, x)**2 + sp.diff(y, x)**2)
# Perform the integrals of the dot products wrt to 'x' over the interval [-1, 0]
ans1 = sp.integrate(Gdx, (x, -1, 0))  # Integral of Gdx over x from -1 to 0
ans2 = sp.integrate(Gdy, (x, -1, 0))  # Integral of Gdy over x from -1 to 0
ans3 = sp.integrate(Gds, (x, -1, 0))  # Integral of Gds over x from -1 to 0
# Return the results of the integrals
ans1, ans2, ans3
```

In Problems 1–4, evaluate $\int_C G(x, y)\, dx$, $\int_C G(x, y)\, dy$, and $\int_C G(x, y)\, ds$ on the indicated curve C.

4. $G(x, y) = x^2/y^3$; $2y = 3x^{2/3}$, $1 \le x \le 8$

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')
y = 3/2 * x**(2/3)  # Parametrize y
G = x**2 / y**3  # Vector field

# Compute dot products and integrals in one step
Gdx = G * sp.diff(x, x)
Gdy = G * sp.diff(y, x)
Gds = G * sp.sqrt(sp.diff(x, x)**2 + sp.diff(y, x)**2)

# Integrals over x from 1 to 8
ans1 = sp.integrate(Gdx, (x, 1, 8))
ans2 = sp.integrate(Gdy, (x, 1, 8))
ans3 = sp.integrate(Gds, (x, 1, 8))

ans1, ans2, ans3
```

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าอินทิกรัล $\int_C y^2 dx + x dy$ เมื่อ C คือ $x^2+4y^2=4$

The exact answer may be found using the parametrization

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

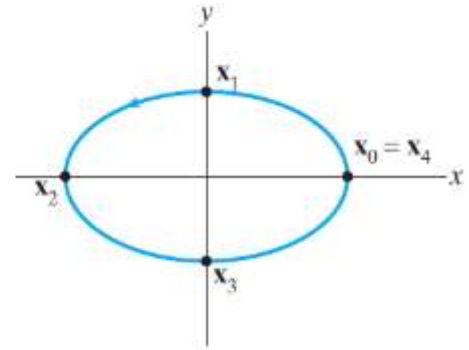


Figure The ellipse C

We calculate that

$$\int_C y^2\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t(-2\sin t) + 2\cos^2 t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2(1-\cos^2 t)(-\sin t) + 1 + \cos 2t\right) dt$$

$$= \left(2\cos t - \tfrac{2}{3}\cos^3 t + t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

```
import sympy as sp
t = sp.symbols('t')
x, y = 2 * sp.cos(t), sp.sin(t)  # Parametrization of the curve
F = [y**2, x]  # Vector field
# Compute the dot product and integrate
sol = sp.integrate(F[0] * sp.diff(x, t) + F[1] * sp.diff(y, t), (t, 0, 2*sp.pi))
sol
```

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

จงพิสูจน์ว่าอินทิกรัลตามเส้น $\int_C y^2 dx + xydy$ มีค่าเท่ากันตามแต่ละเส้นทาง C ต่อไปนี้

$C: x = 2t + 1, \quad y = 4t + 2, \quad 0 \le t \le 1$

$C: x = t^2, \quad y = 2t^2, \quad 1 \le t \le \sqrt{3}$

$C: x = \ln t, \quad y = 2\ln t, \quad e \le t \le e^3$

$$\int_{C_1} y^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 (4t+2)^2 2\,dt + \int_0^1 (2t+1)(4t+2)4\,dt = \int_0^1 (64t^2 + 64t + 16)\,dt$$
$$= \left(\frac{64}{3}t^3 + 32t^2 + 16t\right)\Big|_0^1 = \frac{64}{3} + 32 + 16 = \frac{208}{3}$$

$$\int_{C_2} y^2\,dx + xy\,dy = \int_1^{\sqrt{3}} 4t^4(2t)\,dt + \int_1^{\sqrt{3}} 2t^4(4t)\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} 16t^5\,dt = \frac{8}{3}t^6\Big|_1^{\sqrt{3}} = 72 - \frac{8}{3} = \frac{208}{3}$$

$$\int_{C_3} y^2\,dx + xy\,dy = \int_e^{e^3} 4(\ln t)^2\frac{1}{t}\,dt + \int_e^{e^3} 2(\ln t)^2\frac{2}{t}\,dt = \int_e^{e^3} \frac{8}{t}(\ln t)^2\,dt = \frac{8}{3}(\ln t)^3\Big|_e^{e^3}$$
$$= \frac{8}{3}(27 - 1) = \frac{208}{3}$$

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

จงพิสูจน์ว่าอินทิกรัลตามเส้น $\int_C \; y^2 dx + xydy$ มีค่าเท่ากันตามแต่ละเส้นทาง C ต่อไปนี้

$C: x = 2t + 1, \quad y = 4t + 2, \quad 0 \le t \le 1$

$C: x = t^2, \quad y = 2t^2, \quad 1 \le t \le \sqrt{3}$

$C: x = \ln t, \quad y = 2\ln t, \quad e \le t \le e^3$

```
import sympy as sp
t = sp.symbols('t')
x, y = 2 * t + 1, 4 * t + 2        # Parametrization of the curve
F = [y**2, x * y]                   # Vector field
sol = sp.integrate(F[0] * sp.diff(x, t) + F[1] * sp.diff(y, t), (t, 0, 1))
sol
```

```
import sympy as sp
t = sp.symbols('t')
x, y = t**2, 2 * t**2  # Parametrization of the curve
F = [y**2, x * y]          # Vector field
sol = sp.integrate(F[0] * sp.diff(x, t) + F[1] * sp.diff(y, t), (t, 1, sp.sqrt(3)))
sol
```

```
import sympy as sp
t = sp.symbols('t')
x, y = sp.log(t), 2 * sp.log(t)    # Parametrization of the curve
F = [y**2, x * y]                   # Vector field
sol = sp.integrate(F[0]*sp.diff(x,t)+F[1]*sp.diff(y,t),(t, sp.exp(1),sp.exp(1)**3))
sol
```

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

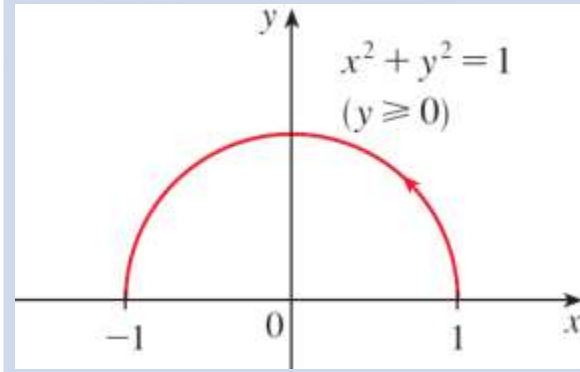
<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า $\int_C (2 + x^2 y) \mathrm{d}s$ โดยที่ C คือครึ่งบนของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

เส้นโค้ง C ถูกพารามิเตอร์ด้วย $x = cos(t), y = sin(t), 0 \le t \le \pi$

$$\int_C (2 + x^2 y)\, ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt$$

$$= \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = 2\pi + \tfrac{2}{3}$$



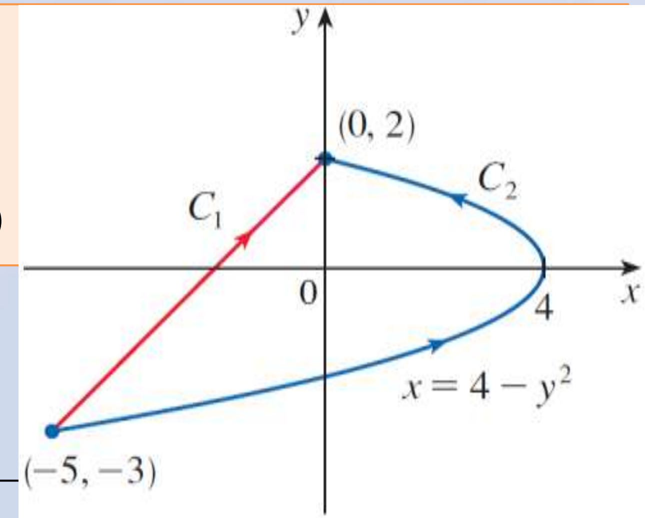

```
import sympy as sp
# Define the symbol and the parameterization
t = sp.symbols('t')
x = sp.cos(t)
y = sp.sin(t)
# Define the vector field
G = 2 + x**2 * y
# Compute the dot products
Gds = G * sp.sqrt(sp.diff(x, t)**2 + sp.diff(y, t)**2)  # F * ds
ans = sp.integrate(Gds, (t, 0, sp.pi))
ans
```

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า $\int_C \; y^2dx + xdy$ โดยที่ C คือเส้นโค้งต่อไปนี้

a) $C=C_1$ คือ เส้นตรงจากจุด (-5, -3) ถึง (0, 2)

b) $C=C_2$ คือ ส่วนโค้งพาราโบล่า $x = 4 - y^2$ จากจุด (-5, -3) ถึง (0, 2)



(a) $$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y = \; x + 2$$

$$\int_C \; y^2dx + xdy = \int_{-5}^{0}(x+2)^2dx + xdx = -\frac{5}{6}$$

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')
y = x + 2        # Parametrization of the curve
F = [y**2, x]    # Vector field
sol = sp.integrate(F[0] * sp.diff(x, x) + F[1] * sp.diff(y, x), (x, -5, 0))
sol
```

(b) Since the parabola is given as a function of y, let's take y as the parameter and write C_2 as

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Then $dx = -2y\,dy$ and by Formulas 7 we have

$$\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-3}^{2} y^2(-2y)\,dy + (4 - y^2)\,dy$$

$$= \int_{-3}^{2} (-2y^3 - y^2 + 4)\,dy$$

$$= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^{2} = 40\tfrac{5}{6}$$

```
import sympy as sp
y = sp.symbols('y')
x = 4 - y**2
F = [y**2, x]
sol =
sp.integrate(F[0]*sp.diff(x,y)
+ F[1]*sp.diff(y,y),(y,-3, 2))
sol
```

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้เส้นโค้งทั้ง 3 อยู่ระหว่างจุด (0,0) และ (2,4)

$C_1: x = t, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le 2$

$C_2: x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \le t \le 2$

$C_3: x = 2t - 4, \quad y = 4t - 8, \quad 2 \le t \le 3$

จงแสดงและอธิบายว่าทำไม $\int_{C_1} xy\, ds = \int_{C_3} xy\, ds$ แต่ $\int_{C_1} xy\, ds \neq \int_{C_2} xy\, ds$

$$\int_{C_1} xy\, ds = \int_0^2 t(2t)\sqrt{1+4}\, dt = 2\sqrt{5}\int_0^2 t^2\, dt = 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^2 = \frac{16\sqrt{5}}{3}$$

$$\int_{C_2} xy\, ds = \int_0^2 t(t^2)\sqrt{1+4t^2}\, dt = \int_0^2 t^3\sqrt{1+4t^2}\, dt \qquad \boxed{u = 1+4t^2,\ du = 8t\, dt,\ t^2 = \frac{1}{4}(u-1)}$$

$$= \int_1^{17} \frac{1}{4}(u-1)u^{1/2}\frac{1}{8}\, du = \frac{1}{32}\int_1^{17}(u^{3/2} - u^{1/2})\, du = \frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^{17} = \frac{391\sqrt{17}+1}{120}$$

$$\int_{C_3} xy\, ds = \int_2^3 (2t-4)(4t-8)\sqrt{4+16}\, dt = 16\sqrt{5}\int_2^3 (t-2)^2\, dt = 16\sqrt{5}\left[\frac{1}{3}(t-2)^3\right]\Big|_2^3 = \frac{16\sqrt{5}}{3}$$

C_1 and C_3 are different parameterizations of the same curve, while C_1 and C_2 are different curves.

Line Integrals (อินทิกรัลตามเส้น)

ตัวอย่าง กำหนดให้เส้นโค้งทั้ง 3 อยู่ระหว่างจุด (0,0) และ (2,4)

$C_1: x = t, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le 2$

$C_2: x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \le t \le 2$

$C_3: x = 2t - 4, \quad y = 4t - 8, \quad 2 \le t \le 3$

จงแสดงและอธิบายว่าทำไม $\int_{C_1} xy\,ds = \int_{C_3} xy\,ds$ แต่ $\int_{C_1} xy\,ds \neq \int_{C_2} xy\,ds$

```
import sympy as sp
t = sp.symbols('t')
x = t ; y = 2 * t ; F = x * y
D = F * sp.sqrt(sp.diff(x, t)**2 + sp.diff(y, t)**2)
sol = sp.integrate(D, (t, 0, 2))
print(sol)
```

```
import sympy as sp
t = sp.symbols('t')
x = t ; y = t**2 ; F = x * y
D = F * sp.sqrt(sp.diff(x, t)**2 + sp.diff(y, t)**2)
sol = sp.integrate(D, (t, 0, 2))
print(sol)
```

```
import sympy as sp
t = sp.symbols('t')
x = 2*t-4 ; y = 4*t-8 ; F = x * y
D = F * sp.sqrt(sp.diff(x, t)**2 + sp.diff(y, t)**2)
sol = sp.integrate(D, (t, 2, 3))
print(sol)
```

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

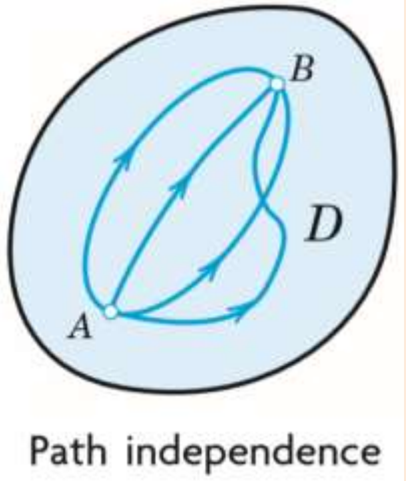
➢ **เป็นคุณสมบัติของฟังก์ชัน ที่ทำให้อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันนั้นในแต่ละเส้นทางจากจุดเริ่มต้นถึงจุดสิ้นสุดมีค่าเท่ากันเสมอ (Independence of Path)**

❑ "เส้นทางการอินทิเกรท (path of integration)" คือเส้นโค้งเรียบ C ที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง จากจุดเริ่มต้น A ถึงจุดสิ้นสุด B

❑ ถ้า $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ เป็นสนามเว็คเตอร์ใน 2 มิติ และเส้นทาง C เป็นฟังก์ชันเว็คเตอร์ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$, ดังนั้นอินทิกรัลตามเส้น (line integral) จะเท่ากับ

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

โดยที่ $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ และ $x = x(t), y = y(t)$



Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

- บางครั้ง อินทิกรัลตามเส้นที่เกี่ยวข้องกับสนามเว็คเตอร์ **F** จะไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทางของการอินทิกรัล

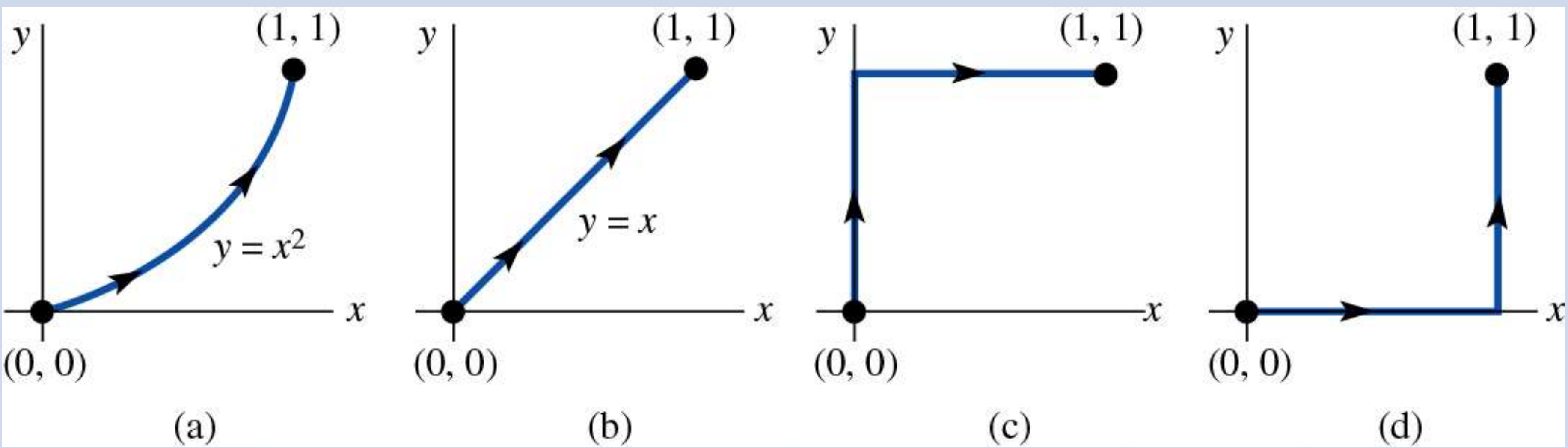


Figure 09.9.1: Line integral in Example 1 is the same on four paths

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

จงแสดงว่า $\int_C ydx + xdy$ มีค่าเท่ากันในแต่ละ path C ระหว่างจุด $(0,0)$ และ $(1,1)$

$$\int_0^1 x^2dx + x(2xdx) = x^3\Big|_0^1 = 1$$

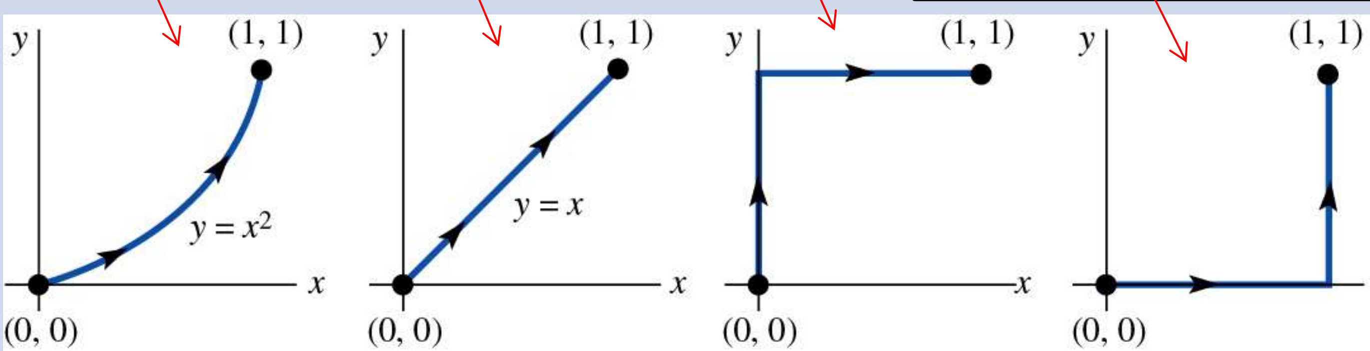
$$\int_0^1 xdx + xdx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

ช่วงแรก : $x = 0, dx = 0 \rightarrow \int_C ydx + xdy = 0$

ช่วงสอง $y = 1, dy = 0 \rightarrow \int_0^1 1dx = x\big|_0^1 = 1$

ช่วงแรก : $y = 0, dy = 0 \rightarrow \int_C ydx + xdy = 0$

ช่วงสอง $x = 1, dx = 0 \rightarrow \int_0^1 1dy = y\big|_0^1 = 1$



$y = x^3,$

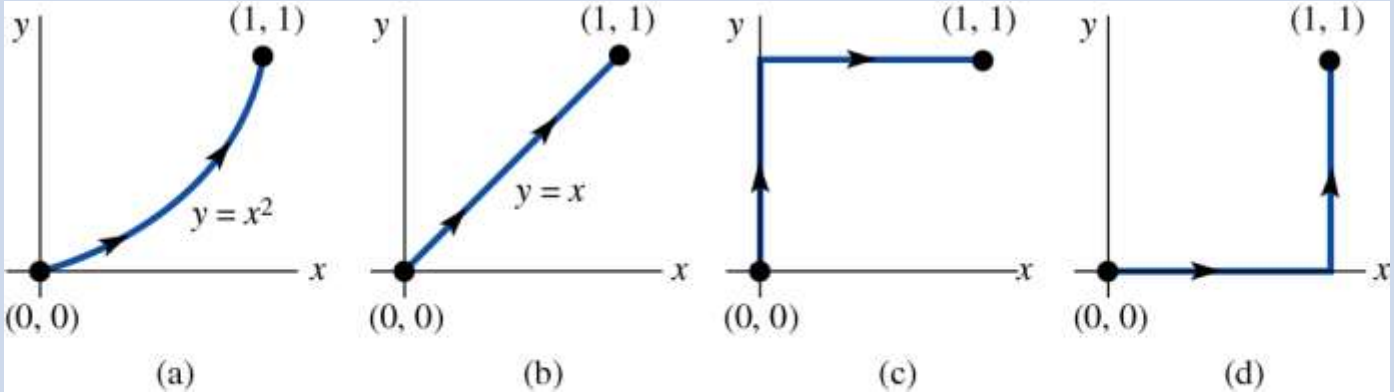
$y = x^4,$

$y = \sqrt{x}$

สนามเว็คเตอร์ **F** ถูกเรียกว่า สนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ *!!!*

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

จงแสดงว่า $\int_C \mathbf{ydx + xdy}$ มีค่าเท่ากันในแต่ละ **path C** ระหว่างจุด $(0,0)$และ $(1,1)$




```
import sympy as sp
t = sp.symbols('t')
x = t ; y = t**2
# Define the vector field F = [y, x]
F = [y, x]

# Compute the dot product F·(dx/dt, dy/dt)
D = F[0]*sp.diff(x, t) + F[1]*sp.diff(y, t)

# Compute the line integral from t=0 to t=1
sol = sp.integrate(D, (t, 0, 1))
sol
```

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

Definition 9.9.1 Conservative Vector Field

ฟังก์ชันเว็คเตอร์ $\mathbf{F}$ ในระบบ 2มิติ และ 3มิติ จะเป็นฟังก์ชันอนุรักษ์ (conservative) ถ้า $\mathbf{F}$ แสดงให้อยู่ในรูปของเกรเดียนท์ของฟังก์ชันสเกลาร์ $(\nabla\phi)$ ได้ ซึ่งฟังก์ชัน ϕ นี้จะถูกเรียกว่า "โพเทนเชียลฟังก์ชันของ $\mathbf{F}$"

$\mathbf{F}$ is conservative if there exists a function ϕ such that $\mathbf{F} = \nabla\phi$

Theorem 9.9.1 Fundamental Theorem

ให้ C เป็นเส้นทางเปิดในขอบเขต R บนระนาบ xy มีค่าเป็น $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$ ถ้า $\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ใน R และ ϕ คือ โพเทนเชียลฟังก์ชันของ $\mathbf{F}$ ดังนั้น

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A), \tag{2}$$

where $A = (x(a), y(a))$ and $B = (x(b), y(b))$.

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

ตัวอย่าง ถ้า $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ และ $d\mathbf{r}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$ ดังนั้น $\int_C ydx + xdy = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

ถ้าเราพิจารณาฟังก์ชัน $\phi(x,y)=xy$ เกรเดียนท์ของฟังก์ชัน ϕ จะมีค่าเท่ากับ

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

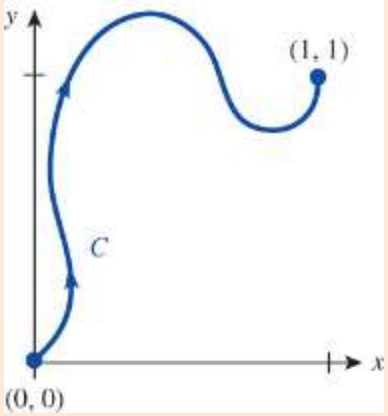
เพราะว่า $\nabla\phi=\mathbf{F}(x,y)$ ดังนั้นสรุปได้ว่า $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ (conservative vector field) และ ϕ เป็นโพเทนเชียลฟังก์ชันของ $\mathbf{F}$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\int_C ydx + xdy$ โดยที่ C เป็นเส้นทางที่มีจุดเริ่มต้น $(0,0)$ และจุดสิ้นสุดที่ $(1,1)$ เราเพิ่งจะรู้มาว่า $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ ที่ถูกกำหนดให้เป็นจุดบนระนาบ xy และ $\phi(x,y) = xy$ เป็นโพเทนเชียลฟังก์ชันของ $\mathbf{F}$ ดังนั้นเราสามารถเขียนได้ว่า

$$\int_C ydx + xdy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}$$

$$= xy\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1\times 1 - 0\times 0$$

$$= 1$$



Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

วิธีเช็คฟังก์ชัน $\mathbf{F}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์หรือไม่?

สมมุติว่า $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ ในบริเวณ R โดยที่ P, Q, อนุพันธ์ของ P และ Q ต่อเนื่องในบริเวณ R ดังนั้น

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

สำหรับทุกจุด (x, y) ในบริเวณ R หรือในทางกลับกัน ถ้าสมการข้างบนเป็นจริงสำหรับทุกจุด (x, y) ในบริเวณ R ดังนั้น $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ ในบริเวณ R

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาว่าสนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F}(x,y)=(x^2-2y^2)\mathbf{i}+(x+5y)\mathbf{j}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์หรือไม่

จาก $P=x^2-2y^2$ และ $Q=x+5y$ ทำให้ได้ว่า $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

ดังนั้น สนามเว็คเตอร์ **F** "ไม่เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์"

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาว่าสนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F}(x,y)=-ye^{-xy}\mathbf{i}-xe^{-xy}\mathbf{j}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์หรือไม่

จาก $P=-ye^{-xy}$ และ $Q=-xe^{-xy}$ ทำให้ได้ว่า $\dfrac{\partial P}{\partial y}=xye^{-xy}-e^{-xy}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

ดังนั้น สนามเว็คเตอร์ **F** เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์

$\mathbf{F}(x,y)\longrightarrow\phi(x,y)$

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

ตัวอย่าง

(a) จงแสดงให้เห็นว่า $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เมื่อ $\mathbf{F}(x,y) = (y^2 - 6xy + 6)\mathbf{i} + (2xy - 3x^2 - 2y)\mathbf{j}$ เป็นค่าที่ไม่ขึ้นกับเส้นทาง (Independence of Path) C ระหว่างจุดเริ่มต้น $(-1,0)$ และจุดสิ้นสุดที่ $(3,4)$

(b) จงหาโพเทนเชียลฟังก์ชัน ϕ สำหรับ $\mathbf{F}$ และ (c) จงประเมินค่า $\int_{(-1,0)}^{(3,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

a) จาก $P = y^2 - 6xy + 6$ และ $Q = 2xy - 3x^2 - 2y$ ทำให้ได้ว่า $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 6x = \frac{\partial Q}{\partial x}$

สนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ และดังนั้น $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ มีค่าที่ไม่ขึ้นกับเส้นทางระหว่างจุด A และ B ใดๆ ในระนาบ

b) เพราะ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ แสดงว่ามีโพเทนเชียลฟังก์ชัน ϕ (แสดงว่า $\mathbf{F}(x,y) = \nabla\phi \rightarrow P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}$)

ดังนั้น $\frac{\partial\phi}{\partial x} = y^2 - 6xy + 6$ และ $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2xy - 3x^2 - 2y$

$$\phi = \int (y^2 - 6xy + 6)dx = xy^2 - 3x^2y + 6x + g(y)$$

โดยที่ $g(y)$ เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรชัน ใช้ $\phi = xy^2 - 3x^2y + 6x + g(y)$ มาหา $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2xy - 3x^2 - 2y$

จะได้ $2xy - 3x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = 2xy - 3x^2 - 2y$ ดังนั้น $\frac{\partial g}{\partial y} = -2y$ หรือ $g(y) = -y^2 + C$

ดังนั้น $\phi = xy^2 - 3x^2y + 6x - y^2 + C$

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

(c) $\int_{(-1,0)}^{(3,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = [xy^2 - 3x^2y + 6x - y^2 + C]_{(-1,0)}^{(3,4)} = (48 - 108 + 18 - 16) - (-6) = -52$

เราสามารถอินทิเกรท ตามเส้นทางใดๆที่ง่ายบนเส้นโค้ง C ซึ่งเชื่อมต่อระหว่างจุด A และ B โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ง่ายที่สุดคือสมการเส้นตรงจาก A ถึง B ซึ่งได้ $y = x + 1$ ดังนั้น

$$\int_{(-1,0)}^{(3,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (y^2 - 6xy + 6)dx + (2xy - 3x^2 - 2y)dy$$

$$= \int_{-1}^{3} \left((x+1)^2 - 6x(x+1) + 6\right)dx + (2x(x+1) - 3x^2 - 2(x+1))dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-6x^2 - 4x + 5)dx = -52$$

```
import sympy as sp
# Define symbols
x, y = sp.symbols('x y')

# Define the vector function F
F = [y**2 - 6*x*y + 6, 2*x*y - 3*x**2 - 2*y]
# Compute derivatives
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)
# Compute phi
phi = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi, y)
phi = sp.integrate(F[0], x) + sp.integrate(dgdy, y)

# Display results
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("phi:", phi)
```

$Note$: สมการเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $(-1,0)$ และ $(3,4)$ คือ $y = x + 1$

Conservative Vector Fields in 3D
(สนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ ใน๓มิติ)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

และเส้นโค้งที่ต่อเนื่องเป็นช่วง $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},\ a \le t \le b$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi\big(x(b), y(b), z(b)\big) - \phi\big(x(a), y(a), z(a)\big)$$
$$= \phi(B) - \phi(A)$$

ถ้า $\mathbf{F}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ และ P, Q, R และอนุพันธ์ย่อยลำดับที่1 ของพวกมันต่อเนื่องในบริเวณ 3D ดังนั้น

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

ถ้า $\boldsymbol{F}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ ดังนั้นจะมี $\mathrm{F} = \nabla\phi$ และ $\nabla \times \nabla\phi = \nabla \times \mathrm{F} = \mathrm{curl\ F} = 0$ เสมอ นั่นคือว่า

$$\nabla \times \mathrm{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}$$

Conservative Vector Fields in 3D
(สนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ ใน๓มิติ)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

ถ้า $\mathbf{F} = \nabla\phi$ ดังนั้น $\langle P, Q, R\rangle = \langle \phi_x, \phi_y, \phi_z \rangle$

ถ้า $\mathbf{F}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ และ P, Q, R และอนุพันธ์ย่อยลำดับที่1 ของ P, Q, R ต้องต่อเนื่องใน บริเวณ $3D$ ดังนั้น วิธีการจำ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \phi_{xy} = \phi_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \phi_{xz} = \phi_{zx} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \phi_{yz} = \phi_{zy} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

ตัวอย่าง

a) จงแสดงให้เห็นว่า $\int_C (y+yz)dx+(x+3z^3+xz)dy+(9yz^2+xy-1)dz$ เป็นค่าที่ไม่ขึ้นกับเส้นทาง (Independence of the path) C ระหว่างจุด(1,1,1) และจุด(2,1,4) หรือไม่

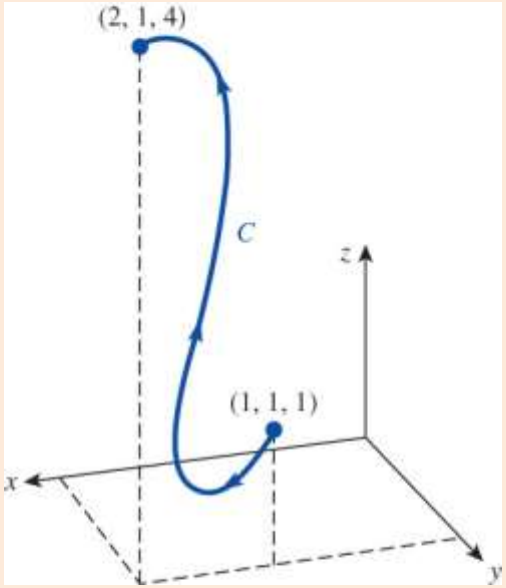
b) จงหาค่า $\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

(a) จากโจทย์ $\mathbf{F}(x,y,z)=(y+yz)\mathbf{i}+(x+3z^3+xz)\mathbf{j}+(9yz^2+xy-1)\mathbf{k}$

ดังนั้น $P=y+yz,\ Q=x+3z^3+xz$ และ $R=9yz^2+xy-1$

ใช้เงื่อนไขว่า $\mathbf{F}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์หรือไม่

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+z=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=y=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=9z^2+x=\frac{\partial R}{\partial y}$$



หาค่าโพเทนเชียลฟังก์ชัน ϕ ?

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \phi_{xy} = \phi_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \phi_{xz} = \phi_{zx} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \phi_{yz} = \phi_{zy} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

จาก $P = y + yz, \qquad Q = x + xz + 3z^3$ และ $R = 9yz^2 + xy - 1$

$P = \phi_x = y + yz$ $\boxed{\int \phi_x dx \Longrightarrow}$ $\phi = xy + xyz + g(y,z)$

$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \Longrightarrow \phi_y = x + xz + g'(y,z)$

$\boxed{\phi_y = Q(\text{รู้ } g'(y,z) = 3z^3)}$

$\boxed{\int g'(y,z)dy =} g(y,z) = 3yz^3 + h(z)$

$\Downarrow$ อัพเดทค่า $g(y,z)$ ใน $\phi = xy + xyz + g(y,z)$

จะได้ ϕ ใหม่ $= xy + xyz + 3yz^3 + h(z)$

$\boxed{\frac{\partial \phi_{\text{ใหม่}}}{\partial z}} \Downarrow$

$\phi_z = R = xy + 9yz^2 + h'(z)$

$\Downarrow \boxed{\phi_z = R = (\text{รู้ } h'(z) = -1)}$

$\boxed{\int h'(z)dz =} h(z) = -z + C$

$\Downarrow$ อัพเดทค่า $h(z)$ ใน ϕ จะได้ค่า ϕ สุดท้าย

$\boxed{\boldsymbol{\phi = xy + xyz + 3yz^3 - z + C}}$

```
import sympy as sp
# Define symbols
x, y, z = sp.symbols('x y z')
# Define function F
F = [y*(1 + z), x*(1 + z) + 3*z**3, x*y + 9*y*z**2 - 1]
# Compute curl components
dRdy_dQdz = sp.diff(F[2], y) - sp.diff(F[1], z)
dPdz_dRdx = sp.diff(F[0], z) - sp.diff(F[2], x)
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)

# Compute potential function phi
phi = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi, y)
phi1 = sp.integrate(F[0], x) + sp.integrate(dgdy, y)
dhdz = F[2] - sp.diff(phi1, z)
phi = phi1 + sp.integrate(dhdz, z)

# Define start and end points
start_point = {x: 1, y: 1, z: 1}
end_point = {x: 2, y: 1, z: 4}
phi_difference = phi.subs(end_point) -
phi.subs(start_point)
# Print results
print("dRdy - dQdz:", dRdy_dQdz)
print("dPdz - dRdx:", dPdz_dRdx)
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("Potential function phi:", phi)
print("Integrate_Fdr:", phi_difference)
```

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

(b) เพื่อหาค่า $\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เราจำเป็นต้องหาโพเทนเชียลฟังก์ชัน $\phi(x,y,z)$ สำหรับ $\mathbf{F}$ โดยใช้ partial integration ($\mathbf{F} = \mathrm{P}\mathrm{i} + \mathrm{Q}\mathrm{j} + \mathrm{R}\mathrm{k} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{k}$)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = R$$

จาก $P = y + yz$, $\quad Q = x + 3z^3 + xz$ และ $R = 9yz^2 + xy - 1$

<u>ขั้นตอนที่๑</u> อินทิเกรท $\frac{\partial\phi}{\partial x} = P$ เทียบกับตัวแปร x จะได้ $\phi = xy + xyz + g(y,z)$

<u>ขั้นตอนที่๒</u> นำ $\phi = xy + xyz + g(y,z)$ ที่ได้จากขั้นตอน๑ มาหา $\frac{\partial\phi}{\partial y} = Q$ จะได้

$x + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = x + 3z^3 + xz$ ดังนั้น $\frac{\partial g}{\partial y} = 3z^3$ หรือ $g(y,z) = 3yz^3 + h(z)$

<u>ขั้นตอนที่๓</u> นำ $\phi = xy + xyz + 3yz^3 + h(z)$ ที่ได้จากขั้นตอน ๑ และ ๒ มาหา $\frac{\partial\phi}{\partial z} = R$ จะได้

$xy + 9yz^2 + \frac{\partial h}{\partial z} = 9yz^2 + xy - 1$ ดังนั้น $\frac{\partial h}{\partial z} = -1$หรือ $h(z) = -z + C$

$$\phi = xy + xyz + 3yz^3 - z + C$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = xy + xyz + 3yz^3 - z + C \Big|_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} = 198 - 4 = 194$$

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

จงหางานที่ทำบนเส้นทางดังรูปด้านล่างด้วยแรง $\mathbf{F}(x,y)$ ต่อไปนี้

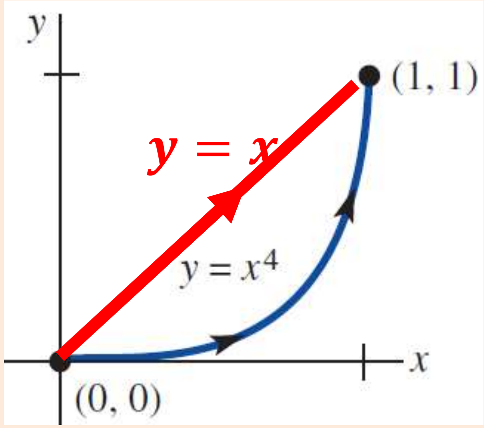
$$\mathbf{F}(x,y) = (2x + e^{-y})\mathbf{i} + (4y - xe^{-y})\mathbf{j}$$

จาก $P = 2x + e^{-y}$ และ $Q = 4y - xe^{-y}$ ทำให้ได้ว่า $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ดังนั้น สนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์ ทำให้มีคุณสมบัติ *Independence of Path* ดังนั้น แทนที่จะใช้เส้นทางดังรูปคือ $y = x^4$ ซึ่งยาก เราเลือกใช้เส้นทางที่ง่ายกว่าคือ $y = x$

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C\,(y=x)} (2x + e^{-y})dx + (4y - xe^{-y})dy = \int_0^1 (2x + e^{-x})dx + (4x - xe^{-x})dx =$$

$$= \int_0^1 (6x + e^{-x} - xe^{-x})dx = 3x^2 - e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=1} = 3 + e^{-1}$$

```
import sympy as sp
# Define symbols
x, y = sp.symbols('x y')
# Define function F
F = [2*x + sp.exp(-y), 4*y - x*sp.exp(-y)]
# Compute curl components
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)
# Compute potential function phi
phi1 = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi1, y)
phi=sp.integrate(F[0],x) + sp.integrate(dgdy,y)
# Define start and end points
start_point = {x: 0, y: 0}
end_point = {x: 1, y: 1}
phi_difference = phi.subs(end_point) - phi.subs(start_point)
# Print results
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("Potential function phi:", phi)
print("Integrate_Fdr:", phi_difference)
```



Note: $\int -xe^{-x}dx = xe^{-x} - \int e^{-x}dx = xe^{-x} + e^{-x}$

Independence of Path (ความเป็นอิสระของเส้นทาง)

จงหางานที่ทำบนเส้นทางดังรูปด้านล่างด้วยแรง $\mathbf{F}(x, y)$ ต่อไปนี้

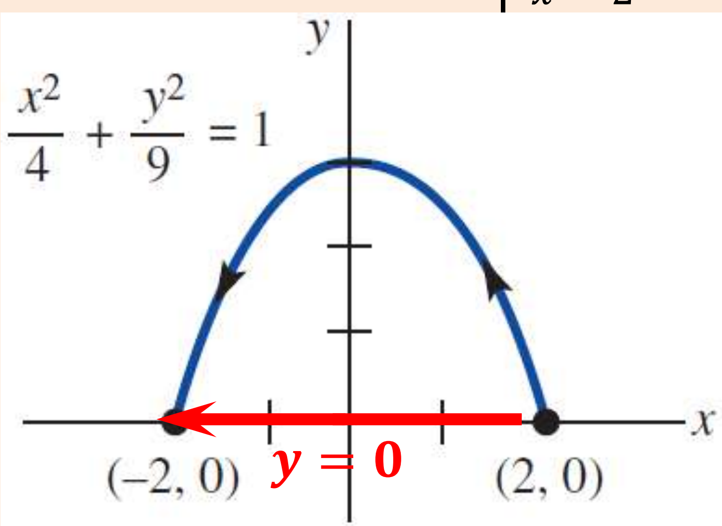
$$\mathbf{F}(x, y) = (2x + e^{-y})\mathbf{i} + (4y - xe^{-y})\mathbf{j}$$

จาก $P = 2x + e^{-y}$ และ $Q = 4y - xe^{-y}$ ทำให้ได้ว่า $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ดังนั้น สนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเว็คเตอร์อนุรักษ์

ทำให้มีคุณสมบัติ $Independence\ of\ Path$ ดังนั้น แทนที่จะใช้เส้นทางดังรูปคือ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ซึ่งยากเราเลือกใช้เส้นทางที่ง่ายกว่าคือ $y = 0$

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C\ (y=0)} (2x + e^{-y})dx + (4y - xe^{-y})dy$$

$$= \int_2^{-2} (2x + 1)dx = x^2 + x \Big|_{x=2}^{x=-2} = -4$$




```
import sympy as sp
# Define symbols
x, y = sp.symbols('x y')
# Define function F
F = [2*x + sp.exp(-y), 4*y - x*sp.exp(-y)]
# Compute curl components
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)

# Compute potential function phi
phi1 = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi1, y)
Phi=sp.integrate(F[0],x) + sp.integrate(dgdy,y)

# Define start and end points
start_point = {x: 2, y: 0}
end_point = {x: -2, y: 0}
phi_difference = phi.subs(end_point) -
phi.subs(start_point)
# Print results
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("Potential function phi:", phi)
print("Integrate_Fdr:", phi_difference)
```

HW

In Problems 11–16, determine whether the given vector field is a conservative field. If so, find a potential function ϕ for $\mathbf{F}$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^3 + 3)\mathbf{i} + (3x^4y^2 + 1)\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3y^2(x^2 + 1)\mathbf{j}$

13. $\mathbf{F}(x, y) = y^2 \cos xy^2\mathbf{i} - 2xy \sin xy^2\mathbf{j}$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

15. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + y)\mathbf{i} + (x + y^3)\mathbf{j}$

16. $\mathbf{F}(x, y) = 2e^{2y}\mathbf{i} + xe^{2y}\mathbf{j}$

11. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^3 + 3)\mathbf{i} + (3x^4y^2 + 1)\mathbf{j}$

```
import sympy as sp

# Define symbols
x, y = sp.symbols('x y')

# Define function F
F = [4*x**3*y**3 + 3, 3*x**4*y**2 + 1]

# Compute curl components
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)

# Compute potential function phi
phi1 = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi1, y)
phi = sp.integrate(F[0], x) + sp.integrate(dgdy, y)

# Print results
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("Potential function phi:", phi)
```

12. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + 3y^2(x^2 + 1)\,\mathbf{j}$

```
import sympy as sp

# Define symbols
x, y = sp.symbols('x y’)

# Define function F
F = [2*x*y**3, 3*(x**2 + 1)*y**2]

# Compute curl components
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)

# Compute potential function phi
phi1 = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi1, y)
phi = sp.integrate(F[0], x) + sp.integrate(dgdy, y)

# Print results
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("Potential function phi:", phi)
```

13. $\mathbf{F}(x, y) = y^2 \cos xy^2 \,\mathbf{i} - 2xy \sin xy^2 \,\mathbf{j}$

```
import sympy as sp

# Define symbols
x, y = sp.symbols('x y')

# Define function F
F = [y**2 * sp.cos(x*y**2), 2 * x * y * sp.sin(x*y**2)]

# Compute curl components
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)

# Compute potential function phi
phi1 = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi1, y)
phi = sp.integrate(F[0], x) + sp.integrate(dgdy, y)

# Print results
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("Potential function phi:", phi)
```

14. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

```
import sympy as sp

# Define symbols
x, y = sp.symbols('x y')

# Define function F
F = [x/(x**2 + y**2 + 1)**2, y/(x**2 + y**2 + 1)**2]

# Compute curl components
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)

# Compute potential function phi
phi1 = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi1, y)
phi = sp.integrate(F[0], x) + sp.integrate(dgdy, y)

# Print results
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("Potential function phi:", phi)
```

15. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + y)\mathbf{i} + (x + y^3)\mathbf{j}$

```
import sympy as sp

# Define symbols
x, y = sp.symbols('x y')

# Define function F
F = [x**3 + y, x + y**3]

# Compute curl components
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)

# Compute potential function phi
phi1 = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi1, y)
phi = sp.integrate(F[0], x) + sp.integrate(dgdy, y)

# Print results
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("Potential function phi:", phi)
```

16. $\mathbf{F}(x, y) = 2e^{2y}\mathbf{i} + xe^{2y}\mathbf{j}$

```
import sympy as sp

# Define symbols
x, y = sp.symbols('x y')

# Define function F
F = [2*sp.exp(2*y), x*sp.exp(2*y)]

# Compute curl components
dQdx_dPdy = sp.diff(F[1], x) - sp.diff(F[0], y)

# Compute potential function phi
phi1 = sp.integrate(F[0], x)
dgdy = F[1] - sp.diff(phi1, y)
phi = sp.integrate(F[0], x) + sp.integrate(dgdy, y)

# Print results
print("dQdx - dPdy:", dQdx_dPdy)
print("Potential function phi:", phi)
```