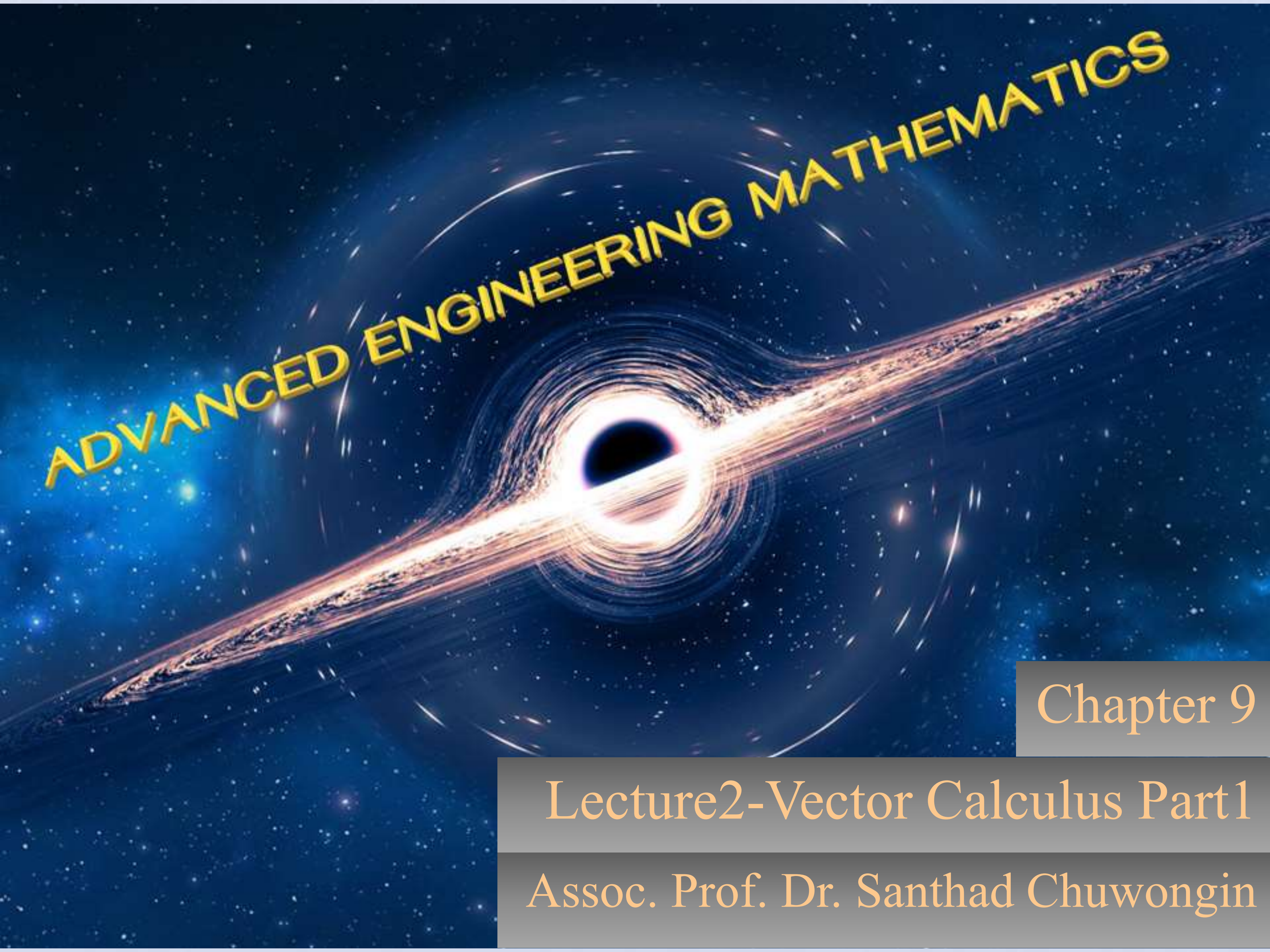

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS
Chapter 9
Lecture2-Vector Calculus Part1
Assoc. Prof. Dr. Santhad Chuwongin

Outline

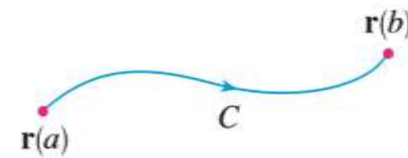
The main results of this chapter are all higher-dimensional versions of the Fundamental Theorem of Calculus. you can see more easily their essential similarity. Notice that we have an integral of a "derivative" over a region on the left side, and the right side involves the values of the original function only on the *boundary* of the region.

Fundamental Theorem of Calculus

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

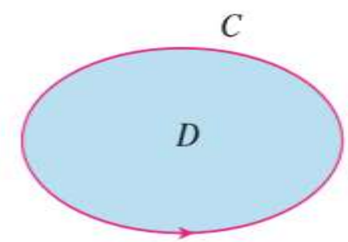
Fundamental Theorem for Line Integrals

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



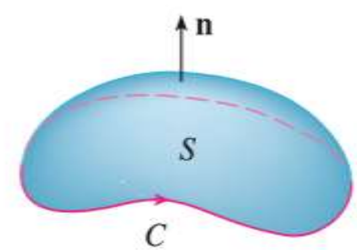
Green's Theorem

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy$$



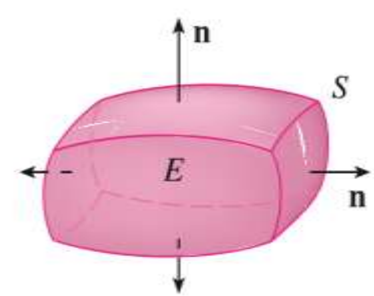
Stokes' Theorem

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Divergence Theorem

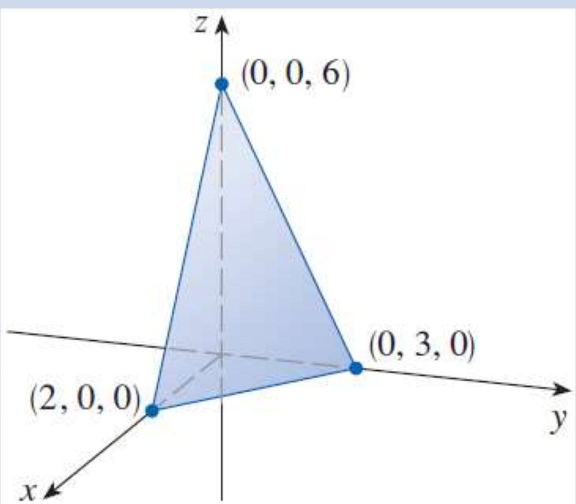
$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



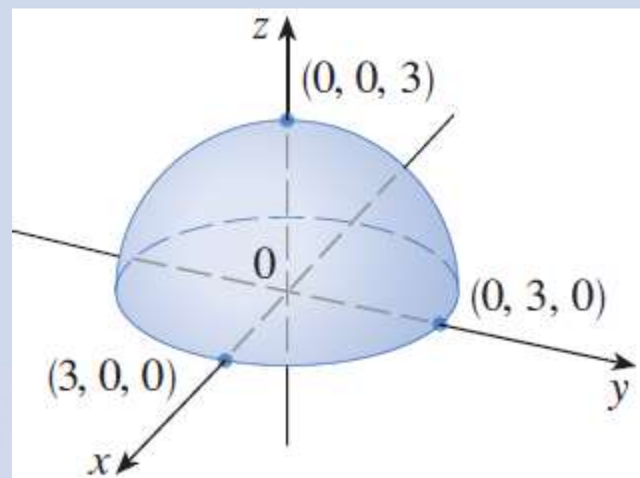
Derivatives' review : (อนุพันธ์)

- ถ้า $y=f(x)$, อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x}$
- ถ้า $y=x^2+2x+1$ จะได้ว่า $\dfrac{\partial y}{\partial x}=2x+2$

EX Sketch the graph of the function
$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.



EX Sketch the graph of the function
$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.



Partial Derivatives (อนุพันธ์ย่อย)

- ถ้า $z = f(x, y)$, อนุพันธ์ย่อยของ Z เทียบกับ x คือ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y))}{\Delta x}$$

และ อนุพันธ์ย่อยของ Z เทียบกับ y คือ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y))}{\Delta y}$$

Theorem 9.4.1 Chain Rule

If $z = f(u, v)$ is differentiable and $u = g(x, y)$ and $v = h(x, y)$ have continuous first partial derivatives, then

Partial Derivatives (อนุพันธ์ย่อย)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต่อไปนี้ ($\frac{\partial z}{\partial x}$ หรือ z_x, $\frac{\partial z}{\partial y}$ หรือ z_y)

1. $z = x^2 - xy^2 + 4y^5$ คือ
2. $z = -x^3 + 6x^2y^3 + 5y^2$ คือ
3. $z = \cos^2(5x) + \sin^2(5y)$ คือ
4. $z = xe^{x^3y}$ คือ
5. $z = \frac{3x-y}{x+2y}$ คือ
6. $w = xy \ln xz$ จงหา w_x, w_y, w_z?
7. $G = (p^2q^3)^{r^4s^5}$ จงหา G_p, G_q, G_r, G_s?

Directional Derivative

EXAMPLE 1 Gradient

Compute $\nabla f(x, y)$ for $f(x, y) = 5y - x^3y^2$.

EXAMPLE 2 Gradient at a Point

If $F(x, y, z) = xy^2 + 3x^2 - z^3$, find $\nabla F(x, y, z)$ at $(2, -1, 4)$.

Directional Derivative

How to find the rate of change of a differentiable function in *any* direction.

- Gradient of a function ("grad f") is

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

- จากรูปด้านขวามือ

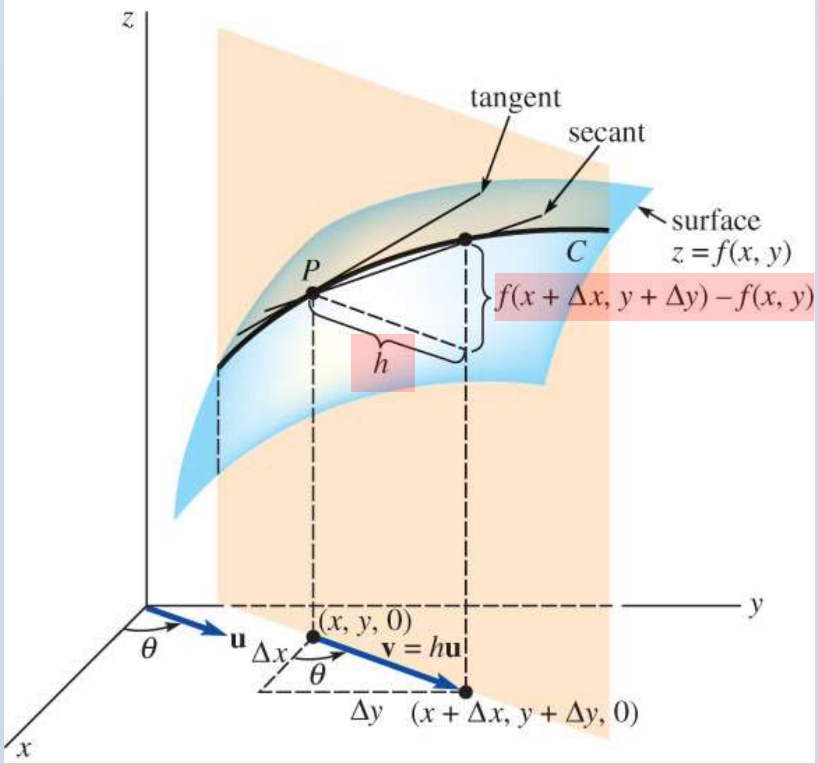
$$h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} > 0, \mathbf{v} = h\mathbf{u}$$

$$\Delta x = h\cos\theta\,, \Delta y = h\sin\theta$$

- ดังนั้น ความชันของเส้น secant

$$\frac{f\left(x+\overbrace{h\cos\theta}^{\Delta x}, y+\overbrace{h\sin\theta}^{\Delta y}\right) - f(x,y)}{h} \qquad (3)$$

The slope of the tangent at P to be the limit of (3) as $h \to 0$.



C is the curve of intersection of the surface and the plane determined by vector **v**

Definition 9.5.1 Directional Derivative

The **directional derivative** of $z = f(x, y)$ in the direction of a unit vector $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ is

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\sin\theta) - f(x, y)}{h} \qquad (4)$$

provided the limit exists.

Directional Derivative

Theorem 9.5.1 Computing a Directional Derivative

If $z = f(x, y)$ is a differentiable function of x and y and $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$, then

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \tag{5}$$

EXAMPLE 3 Directional Derivative

Find the directional derivative of $f(x, y) = 2x^2y^3 + 6xy$ at $(1, 1)$ in the direction of a unit vector whose angle with the positive x-axis is $\pi/6$.

SOLUTION Since $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 + 6y$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 + 6x$, we have

$$\nabla f(x, y) = (4xy^3 + 6y)\mathbf{i} + (6x^2y^2 + 6x)\mathbf{j} \quad \text{and} \quad \nabla f(1, 1) = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

Now, at $\theta = \pi/6$, $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ becomes $\mathbf{u} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j}$. Therefore,

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u} = (10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 5\sqrt{3} + 6.$$

Directional Derivative

Directional Derivative

Find the directional derivative of $F(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ at $(1, -1, 2)$ in the direction of $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

SOLUTION We have $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 8xy$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy - 4x^2$, and $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$ so that

$$\nabla F(x, y, z) = (y^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2xy - 4x^2)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$\nabla F(1, -1, 2) = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Since $\|6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\| = 7$ then $\mathbf{u} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$ is a unit vector in the indicated direction. It follows from (9) that

$$D_{\mathbf{u}}F(1, -1, 2) = (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{54}{7}.$$

Directional Derivative

Directional Derivative

Find the directional derivative of $F(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ at $(1, -1, 2)$ in the direction of $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

SOLUTION We have $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 8xy$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy - 4x^2$, and $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z$ so that

$$\nabla F(x, y, z) = (y^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2xy - 4x^2)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$\nabla F(1, -1, 2) = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Since $\|6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\| = 7$ then $\mathbf{u} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$ is a unit vector in the indicated direction. It follows from (9) that

$$D_{\mathbf{u}}F(1, -1, 2) = (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{54}{7}.$$

Tangent Plane and Normal Lines

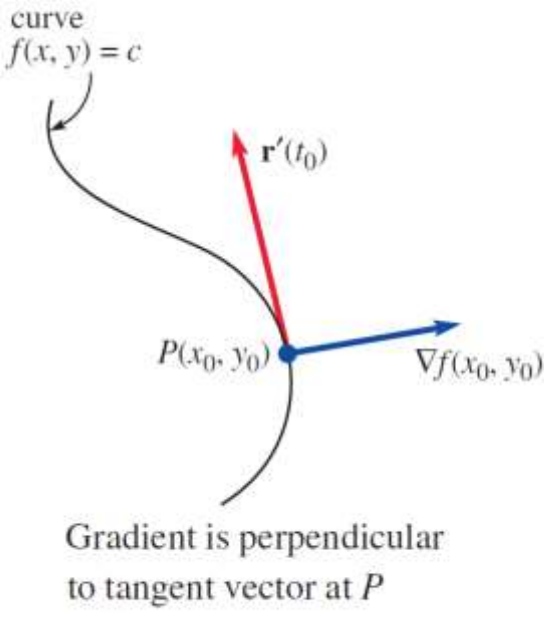
Geometric Interpretation of the Gradient—Functions of Two Variables

สมมุติให้ $f(x, y) = c$ เป็นเส้นโค้งระดับ (Level curve) ของฟังก์ชัน z ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ (Differentiable function) โดย $z=f(x, y)$ ซึ่งผ่านจุด $P(x_0, y_0)$; จะได้ว่า $f(x_0, y_0)=c$ ถ้าเส้นโค้งระดับถูกกำหนดพารามิเตอร์ (parameterized) ด้วยฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$x=g(t),\ y=h(t) \rightarrow x_0=g(t_0),\ y_0=h(t_0)$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(g(t), h(t)) = c$ เทียบกับ t คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=0 \qquad (1)$$



เมื่อเราทราบว่า

$$\nabla f(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j \text{ และ } r'(t)=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j$$

ดังนั้น (1) กลายเป็น $\nabla f \cdot r' = 0$ ที่จุด $t=t_0$ จะได้ว่า

$$\nabla f(x_0, y_0)\cdot r'(t_0)=0$$

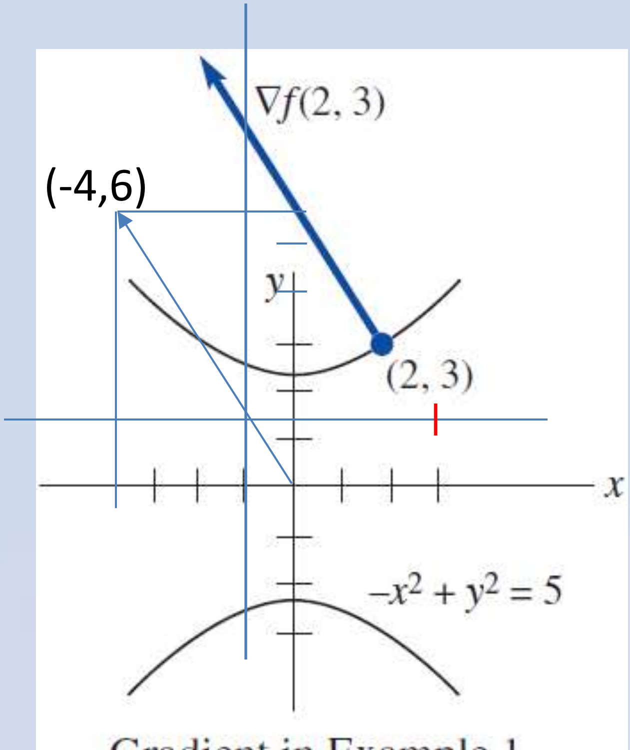
ดังนั้นถ้า $r'(t_0) \neq 0$,เว็คเตอร์ $\nabla f(x_0, y_0)$ ต้องตั้งฉากกับ $r'(t_0)$ ที่จุด $P(x_0, y_0)$ ดังรูป.

Example: Tangent Plane and Normal Lines

- จงหาเส้นโค้งระดับของฟังก์ชัน $f(x, y) = -x^2 + y^2$ ผ่านจุด (2, 3) และหาเว็คเตอร์ที่ตั้งฉากกับเส้นโค้งระดับที่จุดดังกล่าว.

เนื่องจาก $f(2, 3) = -x^2 + y^2 = 5,$
เส้นโค้งระดับคือไฮเพอโบลา $-x^2 + y^2 = 5.$
ดังนั้น

$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ และ $\nabla f(2, 3) = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$



Gradient in Example 1

Tangent Plane and Normal Lines

Geometric Interpretation of the Gradient—Functions of Two Variables

Definition 9.6.1 Tangent Plane

Let $P(x_0, y_0, z_0)$ be a point on the graph of $F(x, y, z) = c$, where ∇F is not $\mathbf{0}$. The **tangent plane** at P is that plane through P that is normal to ∇F evaluated at P.

Theorem 9.6.1 Equation of Tangent Plane

Let $P(x_0, y_0, z_0)$ be a point on the graph of $F(x, y, z) = c$, where ∇F is not $\mathbf{0}$. Then an equation of the tangent plane at P is

$$\nabla F \cdot \boldsymbol{t} = \nabla F \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0$$

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \qquad (5)$$

- The normal line to a surface $F(x, y, z) = c$ at P

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

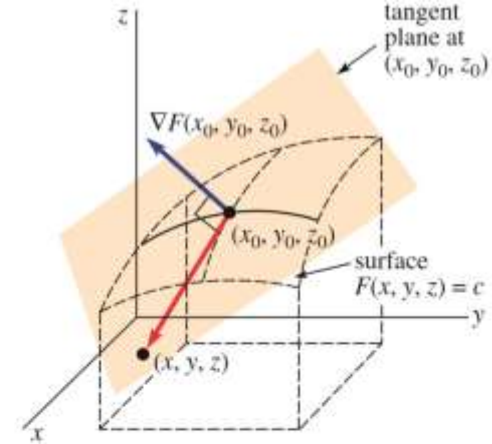


FIGURE 9.6.5 Tangent plane is normal to gradient at P

Example: Equation of Tangent Plane

- จงหาสมการของระนาบสัมผัสกับกราฟ $x^2-4y^2+z^2=16$ ที่จุด (2,1,4)

$F(x,y,z) = x^2-4y^2+z^2$ พื้นผิวระดับ $F(x,y,z) = F(2,1,4) = 16$ ผ่านจุด (2, 1, 4)

$F_x(x, y, z) = 2x$, $F_y(x, y, z) = -8y$, และ $F_z(x, y, z) = 2z$,

ดังนั้น

$F(x, y, z) = 2x\mathbf{i}-8y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ และ $F(2, 1, 4) = 4\mathbf{i}-8\mathbf{j}+8\mathbf{k}$

ตามสมการ (5), สมการของระนาบสัมผัสกับคือ

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

$4(x-2)-8(y-1)+8(z-4)=0$ or $4x-8y+8z=32$ หรือ $\mathbf{x-2y+2z=8}$

Curl and Divergence (เคิร์ล และไดเวอร์เจนซ์)

- เว็คเตอร์ฟังก์ชัน 2 ตัวแปร และ 3 ตัวแปรจะถูกเรียกว่า สนามเว็คเตอร์

Definition 9.7.1 Curl

เคิร์ล ของสนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ คือสนามเว็คเตอร์ที่มีค่าเท่ากับ

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathrm{curl}\ \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Definition 9.7.2 Divergence

ไดเวอร์เจนซ์ ของสนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ คือสเกลาร์ฟังก์ชันที่มีค่าเท่ากับ

$$\nabla \cdot \mathrm{F} = \mathrm{div}\ \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Gradient (เกรเดียนท์)

- Gradient of a Function

เกรเดียนท์ของสนามเว็คเตอร์ $f(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ แทนด้วยนิยาม ∇f

8 Definition If f is a function of two variables x and y, then the **gradient** of f is the vector function ∇f defined by

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Curl and Divergence (เคิร์ล และไดเวอร์เจนซ์)

3 Theorem If f is a function of three variables that has continuous second-order partial derivatives, then

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

PROOF We have

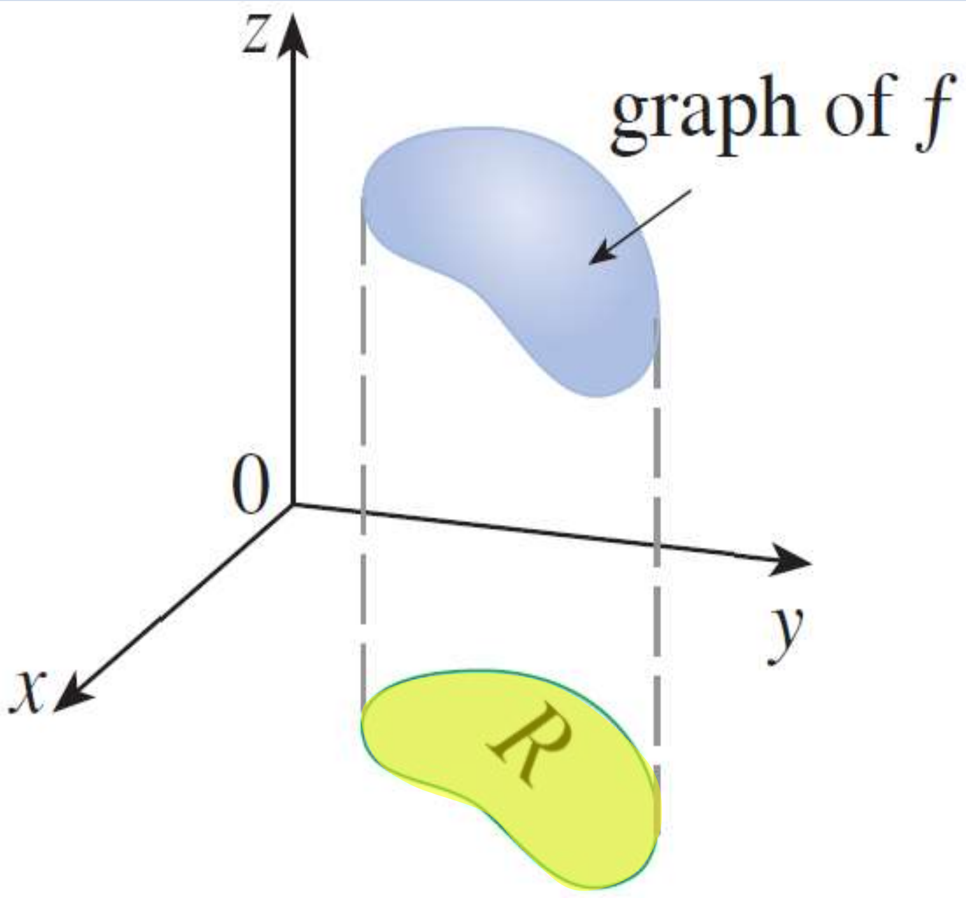
$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

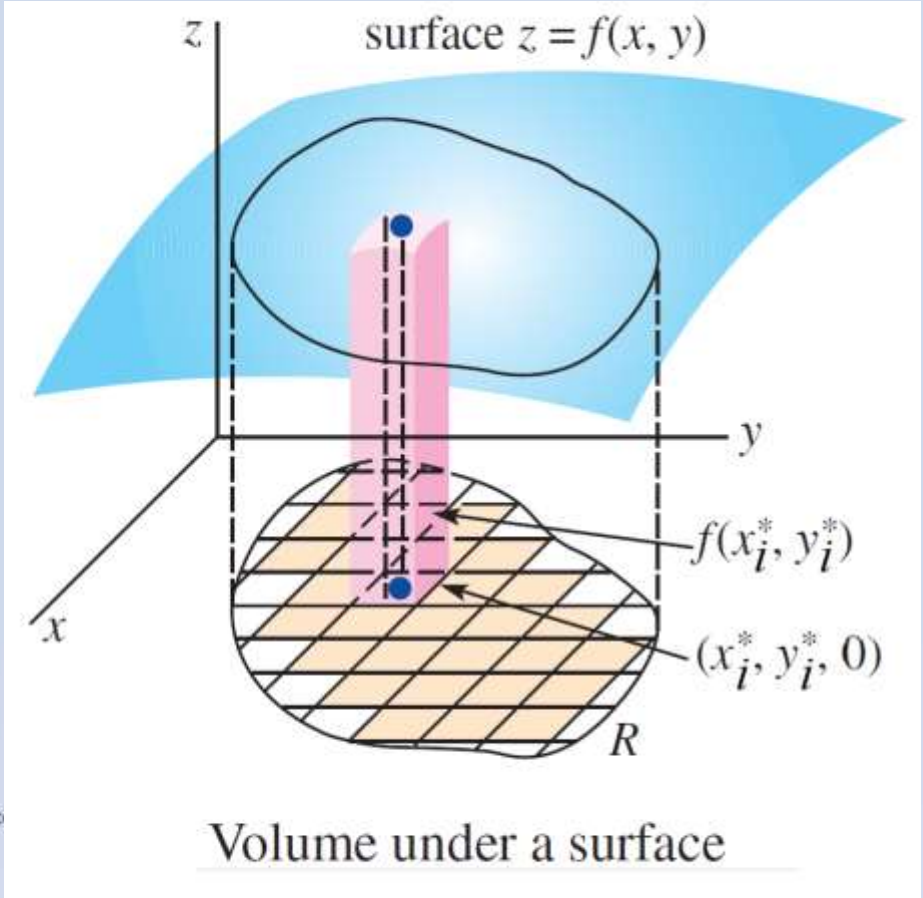
$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \right) \mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Double Integrals (อินทิกรัลสองชั้น)

- สำหรับอินทิกรัลเดี่ยว (Single integrals) ขอบเขตที่เราทำการหาปริพันธ์จะเป็นช่วง (interval) เสมอ
- แต่สำหรับ Double integrals เราต้องการที่จะหาปริพันธ์ของฟังก์ชันไม่เพียงแค่บนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่านั้น แต่ยังรวมถึงบนขอบเขตที่มีรูปร่างทั่วไปมากขึ้นด้วย





Double Integrals (อินทิกรัลสองชั้น)

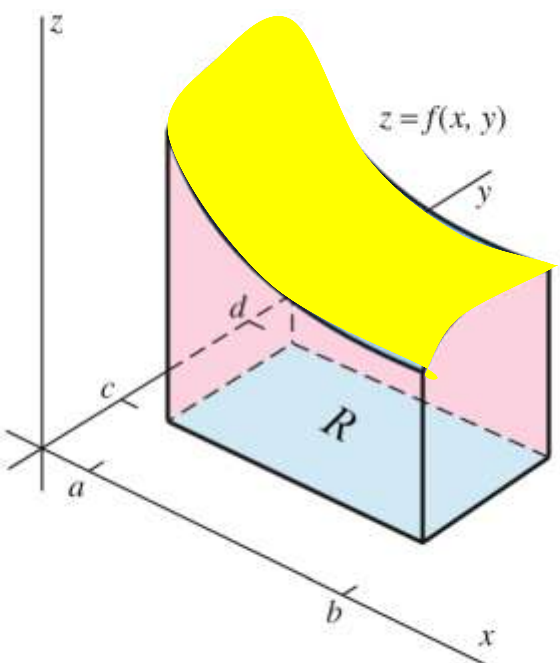
Definition 9.10.1 The Double Integral

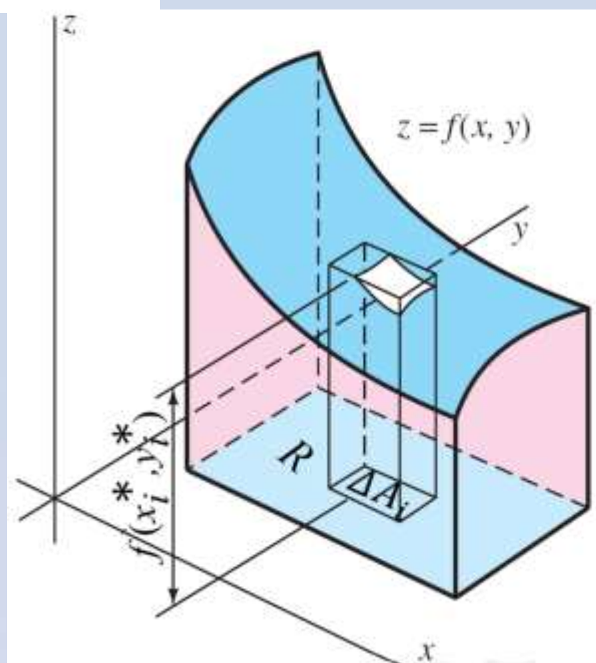
ให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรอยู่เหนือขอบเขต R ใดๆใน 2 มิติ ดังรูป ดังนั้นอินทิกรัลสองชั้นของ f เหนือขอบเขต R มีค่าเท่ากับ

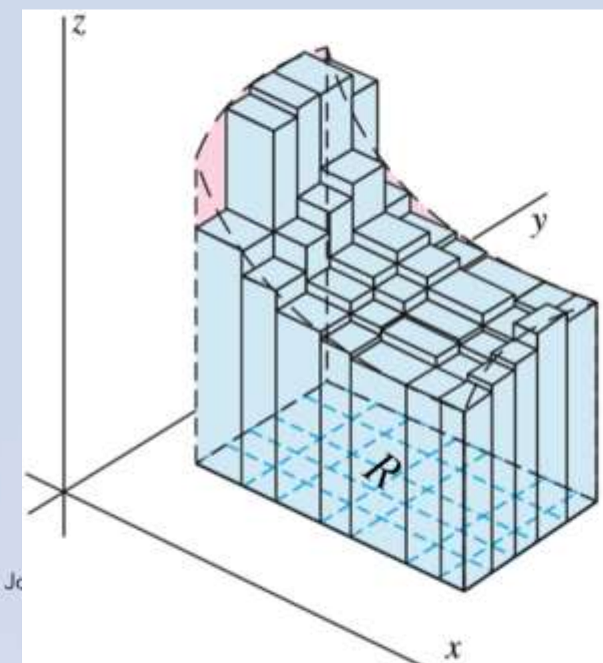
$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i$$

เมื่อ $\|P\|$ ของ partition P เข้าใกล้ศูนย์

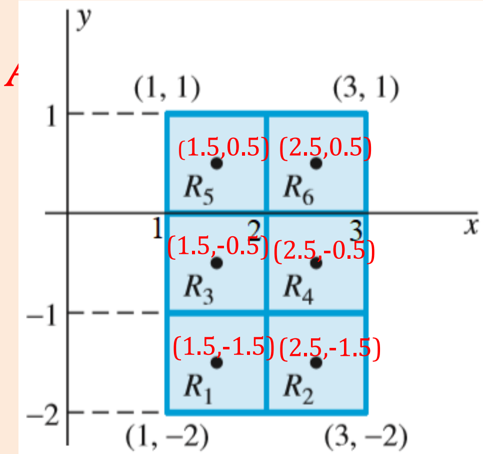
$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$







<u>**ตัวอย่าง**</u> จงประมาณค่า Double integral $\iint_R (4x^3 + 6xy^2)dA$ เหนือขอบเขตสี่เหลี่ยมผืนผ้า R (ระนาบ XY) ดังรูปด้านขวามือ $\left(\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta A\right.$



$$\iint_R (4x^3 + 6xy^2)dA \cong \sum_{i=1}^{n} (4x_i^3 + 6x_i y_i^2)\, \Delta A_i$$

$= (4(1.5)^3 + 6(1.5)(0.5)^2)\Delta A_1$
$+ (4(2.5)^3 + 6(2.5)(0.5)^2)\Delta A_2$
$+ (4(1.5)^3 + 6(1.5)(-0.5)^2)\Delta A_3$
$+ (4(2.5)^3 + 6(2.5)(-0.5)^2)\Delta A_4$
$+ (4(1.5)^3 + 6(1.5)(-1.5)^2)\Delta A_5$
$+ (4(1.5)^3 + 6(1.5)(-1.5)^2)\Delta A_6 \approx 294$

Number of Subrectangles	Midpoint Approximation
6	294.00
24	307.50
96	310.88
384	311.72
1536	311.93
6144	311.98

$$\iint_R (4x^3 + 6xy^2)dA = \int_{-2}^{1}\int_{1}^{3} (4x^3 + 6xy^2)dxdy$$

$$= \int_{-2}^{1} (x^4 + 3x^2y^2)\Big|_1^3\, dy$$

$$= \int_{-2}^{1} (80 + 24y^2)dy = (80y + 8y^3)\Big|_{-2}^{1} = 312$$

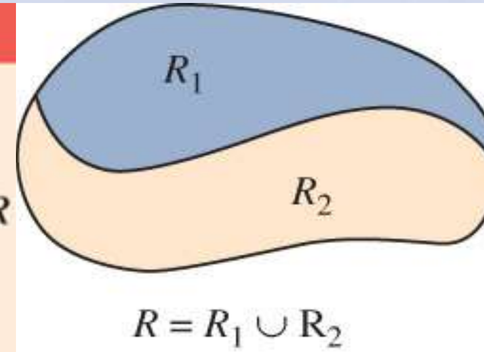
```
import numpy as np
from scipy import integrate
f = lambda x, y: 4 * x**3 + 6 * x * y**2
integrate.dblquad(f, -2, 1, 1, 3)
```

Properties of Double Integrals

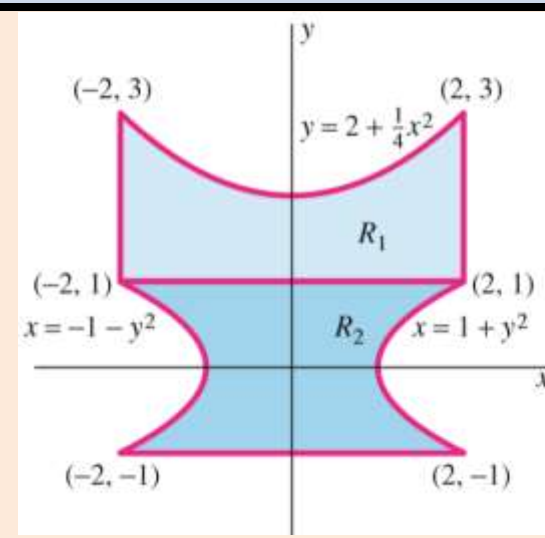
Theorem 9.10.1 Properties of Double Integrals

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีสองตัวแปร และสามารถอินทิเกรทได้เหนือบริเวณ R ดังนั้น

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA,$$ where R_1 and R_2 are subregions of R that do not overlap and $R = R_1 \cup R_2$.



ตัวอย่าง จงหาค่า $\iint_R (x+1)\, dA$ เหนือขอบเขต R ดังรูปด้านขวามือ



$$\iint_R (x+1) dA = \iint_{R_1} (x+1)\, dA + \iint_{R_2} (x+1)\, dA$$

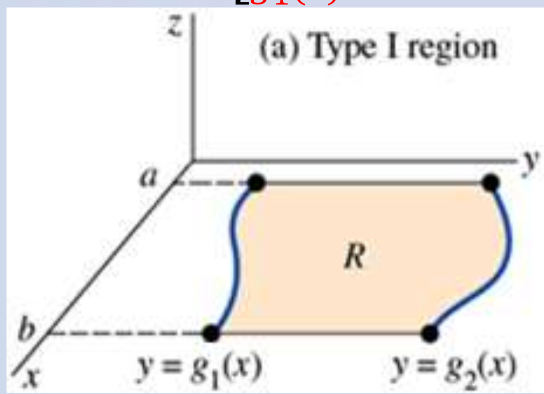
$$= \int_{-2}^{2} \int_{1}^{2+\frac{1}{4}x^2} (x+1)\, dy dx + \int_{-1}^{1} \int_{-1-y^2}^{1+y^2} (x+1)\, dx dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4}\right) dx + \int_{-1}^{1} 2(1+y^2)\, dy = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

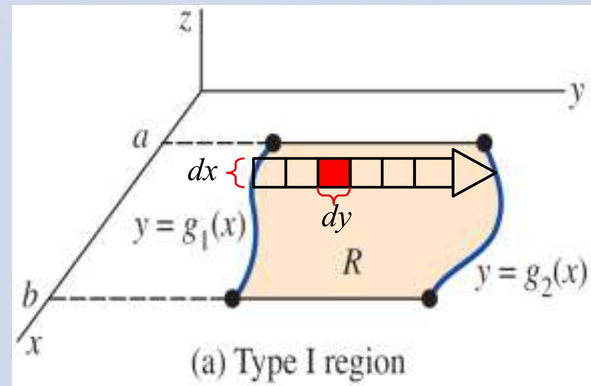
Double Integrals (อินทิกรัลสองชั้น)

$$\int_{a}^{b}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a}^{b}\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

Type I

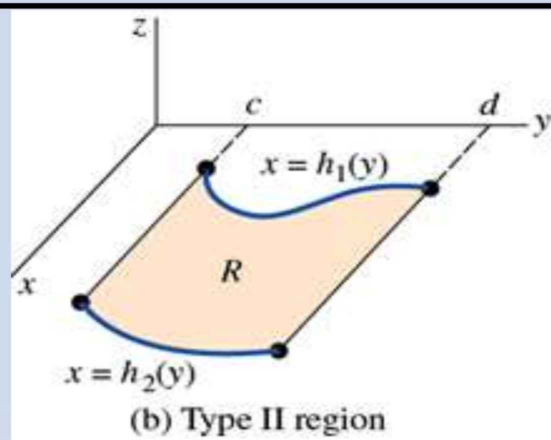


(a) Type I region

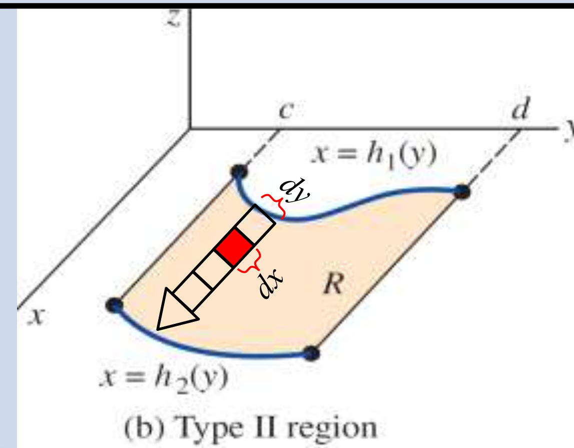


(a) Type I region

Type II



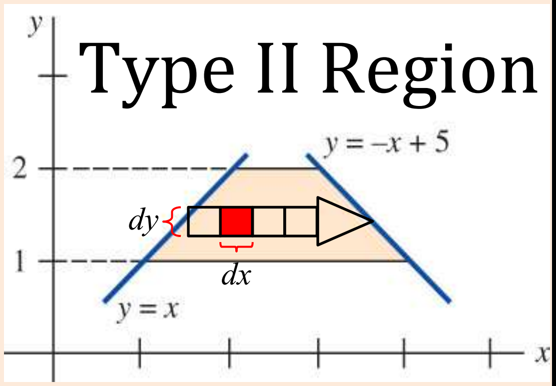
(b) Type II region



(b) Type II region

$$\int_{c}^{d}\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{c}^{d}\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

ตัวอย่าง 1. จงหาค่า Double integral $\iint_R e^{x+3y}dA$ เหนือขอบเขตที่ถูกจำกัดโดยกราฟ $y=1, y=2, y=x$ และ $y=-x+5$



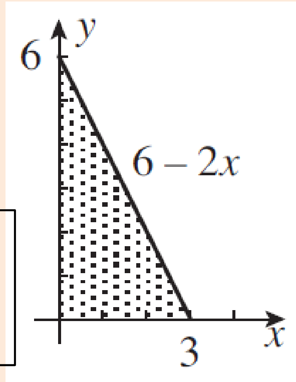
$$\iint_R e^{x+3y}dA = \int_1^2\int_y^{5-y} e^{x+3y}dxdy = \int_1^2 \left(e^{5-y+3y} - e^{y+3y}\right) dy$$

$$= \int_1^2 \left(e^{5+2y} - e^{4y}\right) dy = \frac{e^{5+2y}}{2} - \frac{e^{4y}}{4}\Bigg]_1^2 = \left(\frac{e^9}{2} - \frac{e^8}{4}\right) - \left(\frac{e^7}{2} - \frac{e^4}{4}\right) \approx 2771.6$$

```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y')
sp.integrate(sp.integrate(sp.exp(x+3*y),(x,y,5-y)),(y,1,2)).evalf()
```

2. จงหาค่าปริมาตรของรูปทรงที่ถูกล้อมรอบด้วยกราฟต่อไปนี้ $2x+y+z=6$, x=0, y=0, z=0, first octant

$$\iint_R (6-2x-y)dydx = \int_0^3\int_0^{6-2x} (6-2x-y)dydx = \frac{1}{2}\int_0^3 (6-2x)^2 dx = \frac{-(6-2x)^3}{12}\Bigg|_0^3 = 18$$



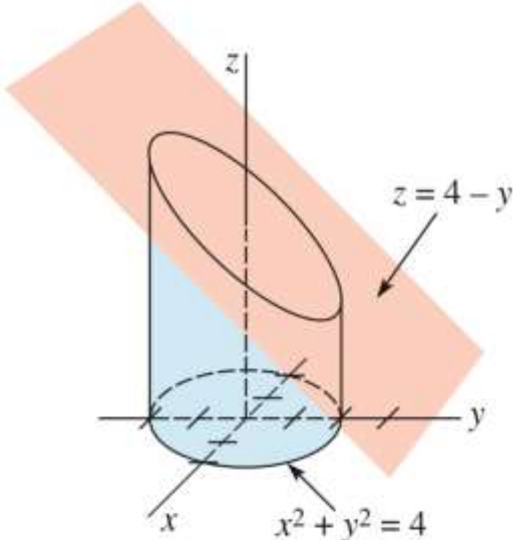

```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y')
sp.integrate(sp.integrate(6-2*x-y,(y,0,6-2*x)),(x,0,3)).evalf()
```

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาขอบเขตที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x^2 + y^2 = 4, z = 4 - y$ และ $z = 0$ ดังรูป จงหาปริมาตรที่ถูกปิดล้อม

(a) $4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-y)\,dy\,dx$

(b) $2\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-y)\,dy\,dx$

(c) $2\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y)\,dx\,dy$



$$V = 2\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y)\,dx\,dy$$

$$= 2\int_{-2}^{2} (4-y)x\Big|_0^{\sqrt{4-y^2}}\,dy$$

$$= 2\int_{-2}^{2} (4-y)\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$= 2\left[2y\sqrt{4-y^2} + 8\sin^{-1}\frac{y}{2} + \frac{1}{3}(4-y^2)^{3/2}\right]\Bigg|_{-2}^{2} = 2(4\pi - (-4\pi)] = 16\pi$$

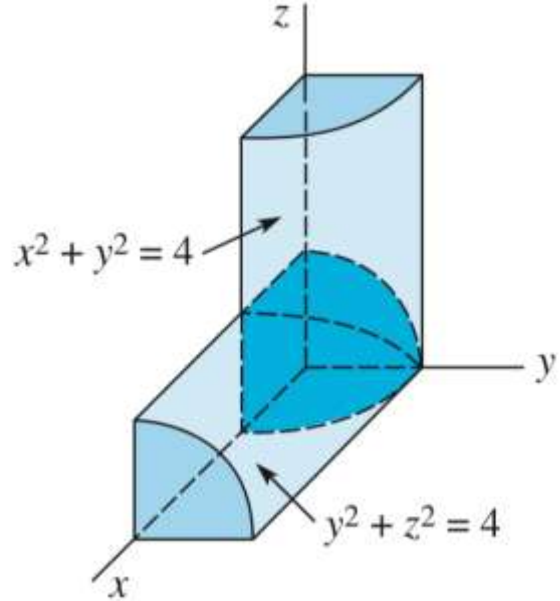
```
import scipy.integrate as spi
import numpy as np
sol, _ = spi.dblquad(lambda x, y: 4 - y, -2, 2,
                     lambda y: -np.sqrt(4 - y**2),
                     lambda y: np.sqrt(4 - y**2))
print(sol)
```

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาขอบเขตที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x^2 + y^2 = 4, y^2 + z^2 = 4$ ดังรูป จงหาปริมาตรที่ถูกปิดล้อม

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y^2)^{1/2}\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y^2)^{1/2}\, dx\, dy$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2)^{1/2}\, dy\, dx$



$$V = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y^2)^{1/2}\, dx\, dy = \int_0^2 (4-y^2)^{1/2} x \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_0^2 (4-y^2)\, dy$$

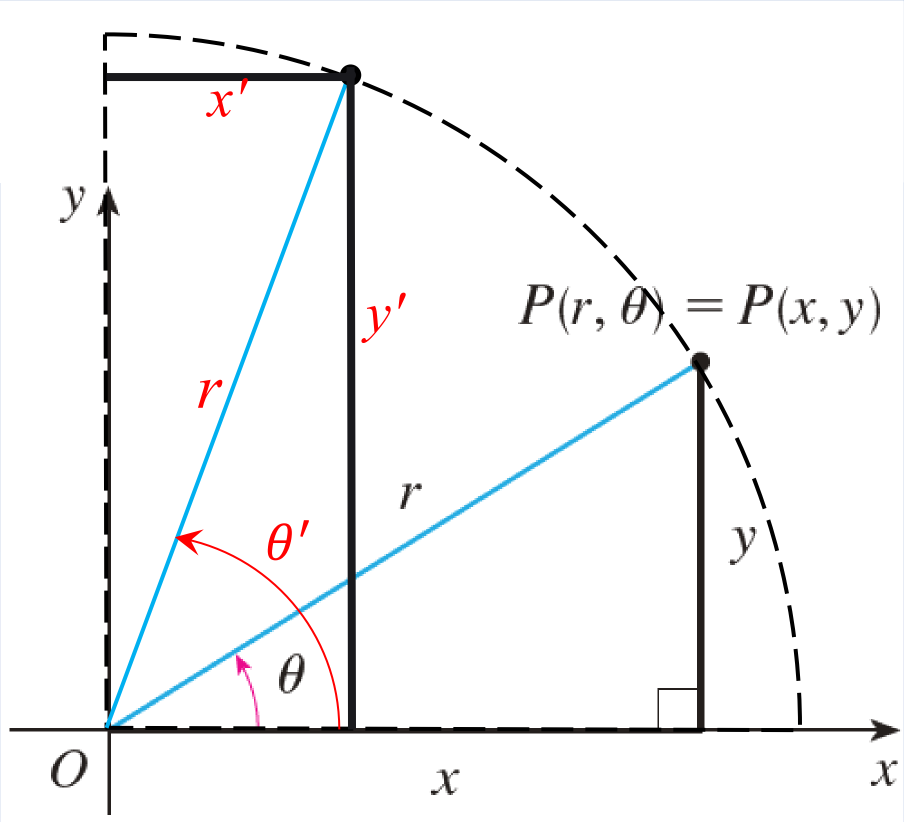
$$= \left(4y - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3}$$

```
import scipy.integrate as spi
import numpy as np
spi.dblquad(lambda x, y: np.sqrt(4 - y**2), 0, 2,
                              lambda y: 0,
                              lambda y: np.sqrt(4 - y**2))
```

การแปลงตัวแปรจากพิกัดฉากไปพิกัดเชิงขั้ว

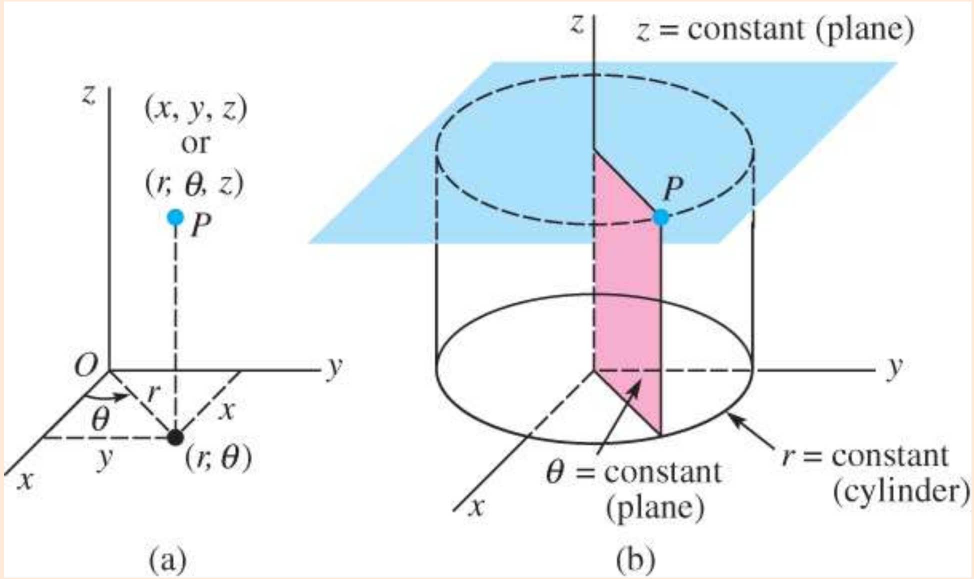
(Change of Variables: Rectangular to Polar Coordinates)

- Polar coordinates (r, θ) of a point are related to the rectangular coordinates (x, y) by the equations



Cylindrical Coordinates (พิกัดทรงกระบอก)

Cylindrical coordinate system เป็นการรวม พิกัดขั้ว (polar) ของจุดบนระนาบ xy กับพิกัดฉากเฉพาะแกน z ดังแสดงในรูป พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate)ของจุด P ถูกแสดงโดย (r, θ, z)



<u>การแปลงพิกัดทรงกระบอก ⟹พิกัดฉาก</u>

จากรูปด้านบน พิกัดฉาก (x, y, z) ของจุด P สามารถหาได้จากพิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) โดย

$$\boxed{x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\,, z = z}$$

<u>การแปลงพิกัดฉาก ⟹พิกัดทรงกระบอก</u>

พิกัดฉาก (x, y, z) แปลงไปเป็น พิกัดทรงกระบอก $(r, \theta, z))$ โดย

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad , z = z}$$

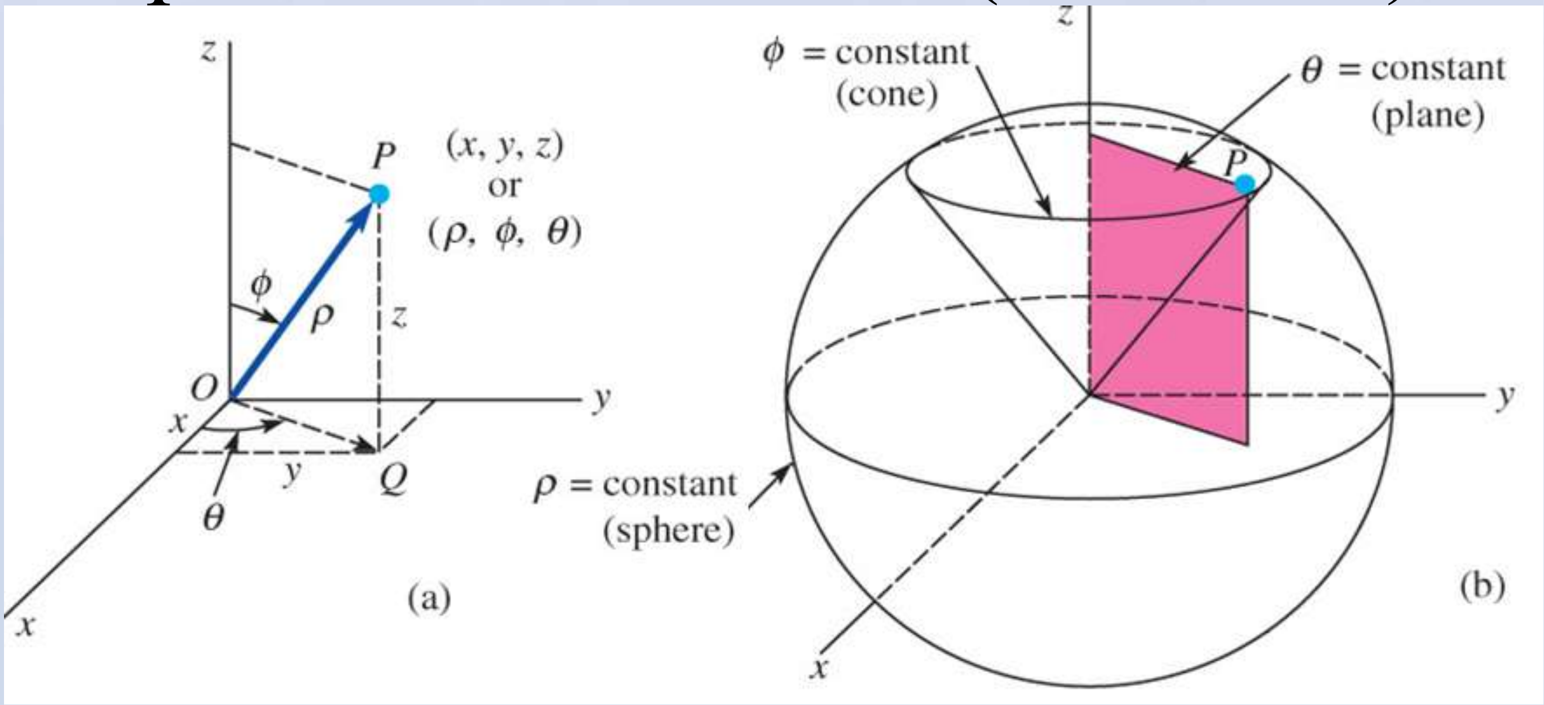
Cylindrical Coordinates (พิกัดทรงกระบอก)

<u>ตัวอย่าง</u>

จงแปลง $\left(8,\frac{\pi}{3},7\right)=(r,\theta,z)$ พิกัดทรงกระบอก $\Longrightarrow (x,y,z)$ พิกัดฉาก

ดังนั้น $(8,\frac{\pi}{3},7) \Longrightarrow (\underbrace{4}_{rcos\theta}, \underbrace{4\sqrt{3}}_{rsin\theta}, \underbrace{7}_{z})$ ในพิกัดฉาก

Spherical Coordinates (พิกัดทรงกลม)



การแปลงพิกัดทรงกลม ⟹พิกัดฉาก

พิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) แปลงไปเป็น พิกัดฉาก (x, y, z) โดย

$x = \|\overrightarrow{OQ}\| \cos\theta\,,\ y = \|\overrightarrow{OQ}\| \sin\theta\,,\ z = \|\overrightarrow{OP}\| \cos\phi$ และจากรูป $\|\overrightarrow{OQ}\| = \rho \sin\phi$

$$\boxed{x = \rho \sin\phi \cos\theta\,,\ y = \rho \sin\phi \sin\theta\,,\ z = \rho \cos\phi}$$

การแปลงพิกัดฉาก ⟹พิกัดทรงกลม

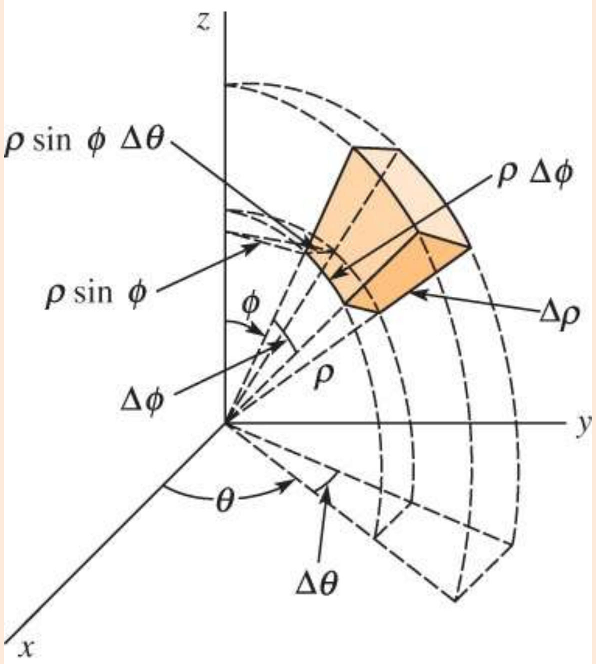
พิกัดพิกัดฉาก (x, y, z) แปลงไปเป็นทรงกลม (ρ, ϕ, θ) โดย

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \phi = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

Converting Coordinates (การแปลงพิกัด)

<u>การอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม (Triple Integrals in Spherical Coordinates)</u>

จากรูป ปริมาตรรูปลิ่มในระบบพิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) ประมาณค่าได้เป็น



$$dV = W \times L \times H = d\rho \times \rho d\phi \times \rho \sin\phi \, d\theta = \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$$

โดยทั่วไป การอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม จะอยู่ในรูป

$$\boxed{\iiint_D F(\rho, \phi, \theta) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(\phi,\theta)}^{f_2(\phi,\theta)} F(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta}$$

<u>ตัวอย่าง</u>

ปริมาตรทรงกลม $= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\mathrm{r}} \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta = \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{\mathrm{r}} \right) \left(-\cos\phi \, \Big|_0^{\pi} \right) \left(\theta \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{\mathrm{r}^3}{3} \times 2 \times 2\pi$

$$= \frac{4\pi \mathrm{r}^3}{3}$$

Converting Coordinates (การแปลงพิกัด)

ตัวอย่าง

จงแปลง $(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) = (\rho, \phi, \theta)$ พิกัดทรงกลม $\Longrightarrow$ พิกัดฉาก (x, y, z) และ พิกัดทรงกลม $\Longrightarrow$ พิกัดทรงกระบอก (r, θ, z)

$$\rho = 6, \phi = \frac{\pi}{4}, \text{ และ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

ดังนั้น $(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \Longrightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2}, 3\sqrt{2}\right)$ ในพิกัดฉาก

$(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \Longrightarrow (3\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, 3\sqrt{2})$ ในพิกัดทรงกระบอก