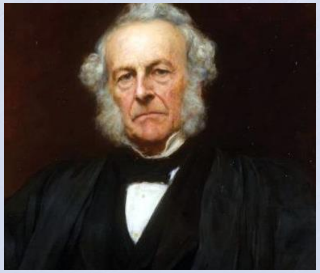
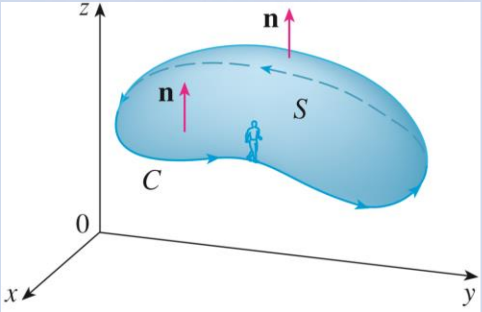
ทฤษฎีของสโตกส์ (Stokes' Theorem)



- ทฤษฎีของสโตกส์(3D) คือ ทฤษฎีบทของกรีน(2D) แต่เป็น 3มิติ



- ทฤษฎีของสโตกส์ กล่าวว่า อินทิกรัลตามเส้น C รอบพื้นผิว S ของ $\mathbf{F}$ ตามทิศทางของเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีค่าเท่ากับอินทิกรัลตามผิวตลอด S ของ $\nabla \times \mathbf{F}$

Theorem 9.14.1 Stokes' Theorem

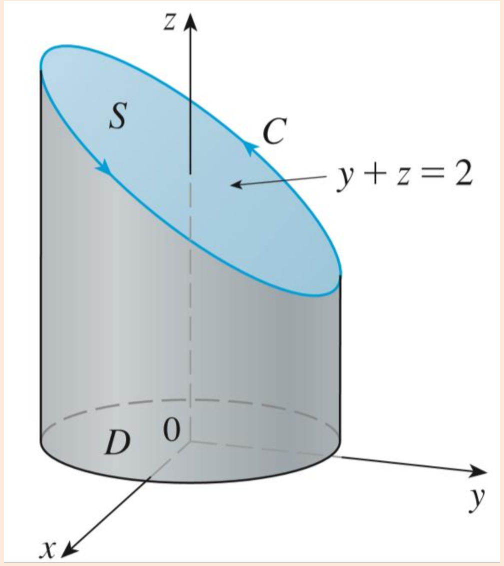
ให้ S เป็นพื้นผิวที่เรียบเป็นช่วงมีทิศทางเว็คเตอร์ตั้งฉากพุ่งออกจากพื้นผิว (Orientable) ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งปิด C ซึ่งมีทิศทางเป็นบวก (ทวนเข็มนาฬิกา) และให้ $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ เป็นสนามเว็คเตอร์ซึ่ง P, Q, R และอนุพันธ์ย่อย $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ของพวกมันต่อเนื่อง (สามารถหาค่าได้) ทั่วบริเวณพื้นผิว S ดังนั้น

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})ds = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}dS$$

โดยที่ $\mathbf{n}$ คือเว็คเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว S (ตามรูปมีทิศทางพุ่งออกจากหัวคนที่เดินตามเส้นโค้ง C)

ทฤษฎีของสโตกส์ (Stokes' Theorem)

ตัวอย่าง จงหาค่า $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ และ C เป็นเส้นโค้งที่เกิดจากระนาบ $y+z = 2$ ตัดกับทรงกระบอก $x^2+y^2 = 1$ ดังรูป



จาก $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ เราสามารถหา $\nabla\times\mathbf{F}$ ได้ดังนี้

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1+2y)\mathbf{k}$$

และเรารู้ว่า $g(x,y,z) = y+z-2 = 0$ ดังนั้นเว็คเตอร์หน่วยทิศพุ่งขึ้น คือ

$$\mathrm{n} = \frac{\nabla \mathrm{g}}{\|\nabla \mathrm{g}\|} = \frac{\mathrm{j+k}}{\sqrt{2}}$$

$$z = f(x,y) = 2-y$$
$$f_x(x,y) = 0$$
$$f_y(x,y) = -1$$

ใช้ทฤษฎีของสโตกส์

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S (1+2y)\,dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_D (1+2y)\sqrt{2}dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1}(1+2\,\mathrm{r}\sin\theta)r\,dr\,d\theta = {\color{red}\pi}$$

```
clear
syms z x y t r
F4 = [-y^2,x,z^2]
sigma = [r*cos(t),r*sin(t),2-y]
boundary=subs(sigma,r,1)
int(dot(subs(F4,[x,y,z],boundary),diff(boundary,t)),t,0,2*pi)
ndS=simplify(cross(diff(sigma,r),diff(sigma,t)))
curlF4=curl(F4,[x,y,z])
```

ทฤษฎีของสโตกส์ (Stokes' Theorem)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ C เป็นเส้นทางสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ (1,0,0) (0,1,0) และ (0,0,1)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y^2)\mathbf{i} + (y+z^2)\mathbf{j} + (z+x^2)\mathbf{k}$$

curl $\mathbf{F} = -2z\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} - 2y\,\mathbf{k}$ and we take the surface S to be the planar region enclosed by C, so S is the portion of the plane $x+y+z=1$ over $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$. Since C is oriented counterclockwise, we orient S upward. Using Equation 16.7.10, we have $z = g(x,y) = 1-x-y$, $P = -2z$, $Q = -2x$, $R = -2y$, and

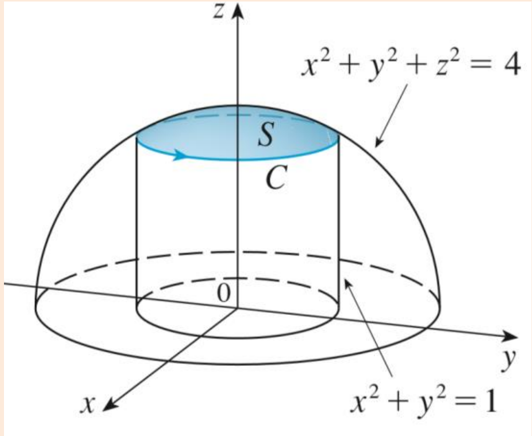
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D [-(-2z)(-1) - (-2x)(-1) + (-2y)]\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (-2)\,dy\,dx = -2\int_0^1 (1-x)\,dx = -1$$

```
clear
syms x y z
plane=[x,y,1-x-y]
F = [x+y^2,y+z^2,z+x^2]
F = subs(F,[x,y,z],plane)
ndS = cross(diff(plane,x),diff(plane,y))
sol = int(int(dot(curl(F,[x,y,z]),ndS),y,0,1-x),x,0,1)
```

ทฤษฎีของสโตกส์ (Stokes' Theorem)

<u>ตัวอย่าง</u> จงใช้ทฤษฎีของสโตกส์ หาค่า $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$ โดยที่ $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ และ S เป็นพื้นผิวที่เกิดจากทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ตัดกันดังรูป



จาก $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ เราสามารถหา $\nabla \times \mathbf{F}$ ได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & yz & xy \end{vmatrix} = (x-y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$$

และเรารู้ว่า $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

ดังนั้น $\mathbf{n}$ คือ

$$\mathrm{n} = \frac{\nabla \mathrm{g}}{\|\nabla \mathrm{g}\|} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{2}$$ และ $f(x,y) = z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

ใช้ทฤษฎีของสโตกส์

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{2}\iint_S (x(x-y) + y(x-y))\, dS$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} (r^2 \cos 2\theta) r\,dr\,d\theta = 0$$

```
clear
syms x y z t r
F = [x*z,y*z,x*y]
boundary = [r*cos(t),r*sin(t),sqrt(4-(r*cos(t))^2-(r*sin(t))^2)]
ndS=cross(diff(boundary,r),diff(boundary,t))
curlF=curl(F,[x,y,z])
sol = int(int(dot(curlF,ndS),r,0,1),t,0,2*pi)
```

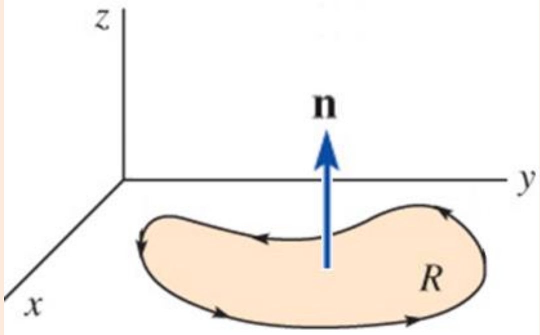
เปรียบเทียบทฤษฎีของสโตกส์ กับ ทฤษฎีบทของกรีน

- ทฤษฎีบทของกรีน เป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีของสโตกส์ ในระนาบ xy

$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$ (สโตกส์)

กฎ: ถ้าเราเดินตาม C ในทิศทางที่เป็นบวก พื้นผิว S จะอยู่ด้านซ้ายมือเรา ดังนั้น $\mathbf{n}$ จะมีทิศพุ่งออกจากพื้นผิว (ชี้ขึ้น) ดังรูป

$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$ (กรีน)



__ตัวอย่างการเปรียบเทียบทฤษฎีของสโตกส์ กับ ทฤษฎีบทของกรีน__

ถ้า S เป็นส่วนราบเรียบบนระนาบ xy ที่ถูกปิดล้อมด้วย C ทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้น

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dxdy$$

โดยทฤษฎีบทของกรีน $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dxdy$

ดังนั้น ทฤษฎีบทของสโตกส์ และกรีนมีค่าเท่ากัน

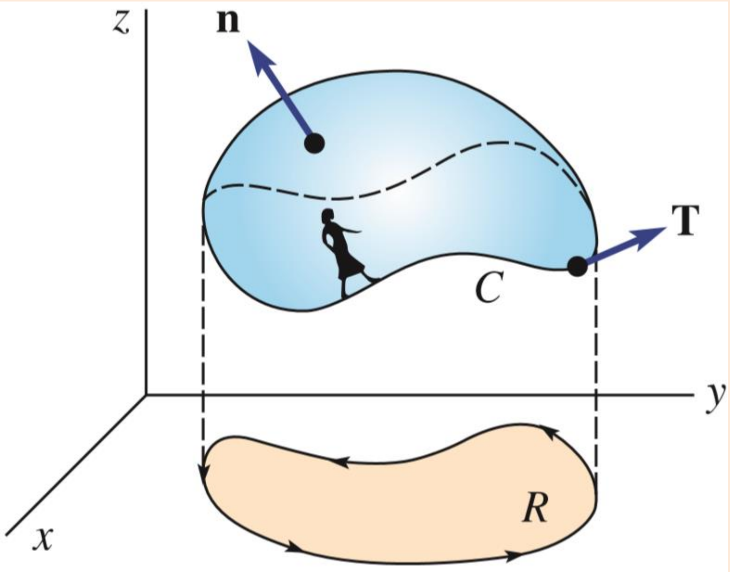
__หมายเหตุ__ ทฤษฎีของสโตกส์ เรามีอิสระในการเลือกพื้นผิว S ใดๆก็ได้ ที่ถูกปิดล้อมด้วย C (C=วงกลม S=ดิสก์, ครึ่งทรงกลม, กรวย เป็นต้น)

__พิสูจน์ทฤษฎีของสโตกส์__

1. ถ้า C และ S คือ ระนาบ xy ดังนั้น ทฤษฎีของสโตกส์=ทฤษฎีบทของกรีน
2. ถ้า C และ S คือ ระนาบใดๆ ดังนั้น ทฤษฎีของสโตกส์=ทฤษฎีบทของกรีน ในระนาบนั้นๆ

พิสูจน์ทฤษฎีของสโตกส์ (Proof Stokes' Theorem)

1. ด้านขวาของสมการ ทฤษฎีของสโตกส์



$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})dS = \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\mathbf{F} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

และสมการของพื้นผิว S คือ $z = f(x,y)$ หรือ $z - f(x,y) = 0$

$$\nabla\times\mathrm{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{k}$$

สมมุติให้ $\mathbf{g}(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$

$$\mathrm{n} = \frac{\nabla\mathrm{g}}{\|\nabla\mathrm{g}\|} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{j} + 1\mathrm{k}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2}}$$

$$\iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS = \iint_R \left\{-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} dA$$

พิสูจน์ทฤษฎีของสโตกส์ (Proof Stokes' Theorem)

2. **ด้านซ้ายของสมการ ทฤษฎีของสโตกส์**

สมการ parametric representation of C คือ

$$x = x(t), y = y(t), z = f\big(x(t), y(t)\big), a \le t \le b$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy + R dz = \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right) dt \leftarrow \text{กฎลูกโซ่}$$

$$= \oint_{C_{xy-plane}} \left(\left(P + R \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy \right)$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial \left(Q + R \frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(P + R \frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial y} \right) dA \quad \leftarrow \text{ทฤษฎีบทของกรีน}$$

พิสูจน์ทฤษฎีของสโตกส์ (Proof Stokes' Theorem)

1. พจน์แรกของสมการ ทฤษฎีบทของกรีน

$$\frac{\partial\left(Q+R\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(Q\big(x,y,f(x,y)\big)+R\big(x,y,f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}$$

2. พจน์ที่สองของสมการ ทฤษฎีบทของกรีน

$$\frac{\partial\left(P+R\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}=-\frac{\partial\left(P\big(x,y,f(x,y)\big)+R\big(x,y,f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$$

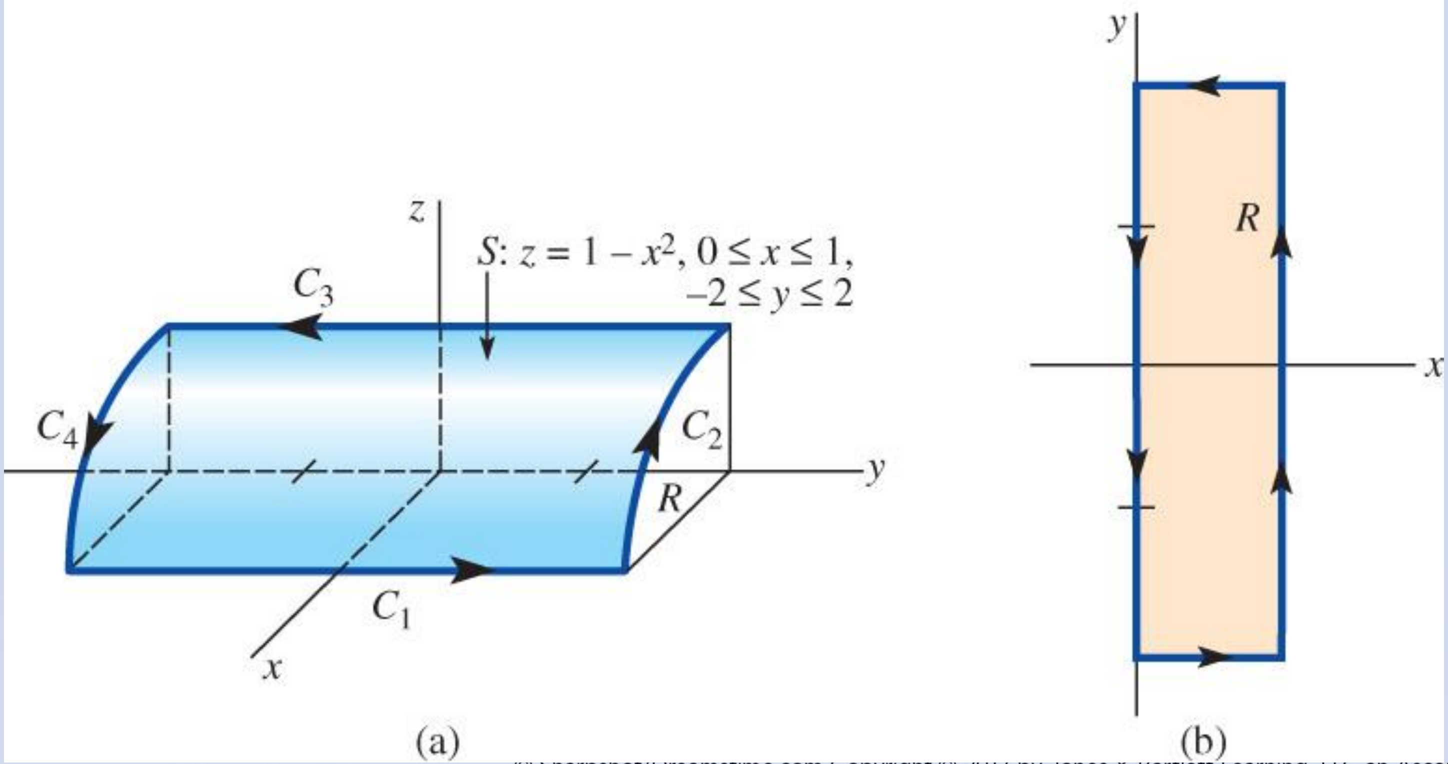
$$=-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}-R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}-R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)-\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=\iint_R\left(\frac{\partial\left(Q+R\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(P+R\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}\right)dA=\iint_R\left\{-\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x}-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}dA$$

ทฤษฎีของสโตกส์ (Stokes' Theorem)

ตัวอย่าง กำหนดให้ S เป็นส่วนของทรงกระบอก $z = 1 - x^2$ สำหรับ $0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2$ จงพิสูจน์ Stokes' theorem สำหรับสนามเว็คเตอร์ $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ สมมุติให้ S เป็น surface ด้านบน

ตามรูป S คือ เส้นโค้ง C ประกอบด้วย C_1, C_2, C_3, C_4 และ บริเวณ R แสดงดังรูป



ทฤษฎีของสโตกส์ (Stokes' Theorem)

<u>Surface Integral</u> จาก $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ เราสามารถหา $\nabla \times \mathbf{F}$ ได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$$

และเรารู้ว่า $g(x,y,z) = z + x^2 - 1 = 0$ เป็นทรงกระบอก ดังนั้นเว็คเตอร์หน่วยทิศพุ่งขึ้น คือ

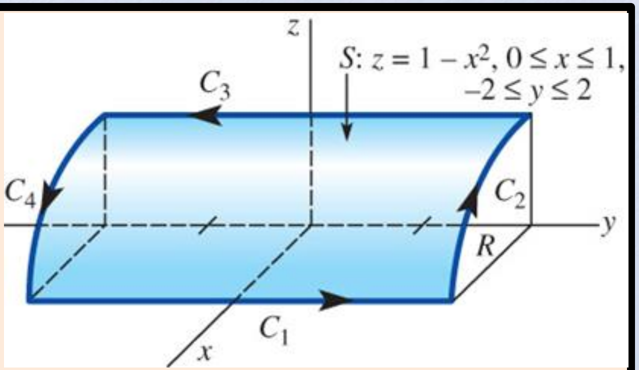
$$\mathrm{n} = \frac{\nabla \mathrm{g}}{\|\nabla \mathrm{g}\|} = \frac{2x\mathrm{i}+\mathrm{k}}{\sqrt{4x^2+1}}$$

ดังนั้น

$$\iint_S (\mathrm{curl}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iint_S \frac{-2xy-x}{\sqrt{4x^2+1}}\,dS =$$

$$\iint_R (-2xy - x)\,dA = \int_0^1 \int_{-2}^2 (-2xy - x)\,dy\,dx = -2$$

```
clear
syms x y z t r
F = [x*y,y*z,x*z]
boundary = [x,y,1-x^2]
ndS=cross(diff(boundary,x),diff(boundary,y))
curlF=curl(F,[x,y,z])
sol = int(int(dot(curlF,ndS),x,0,1),y,-2,2)
```



<u>Line Integral</u> จาก $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$

บน $\boldsymbol{C_1: x = 1, z = 0, dx = 0, dz = 0}$ ดังนั้น

$$\int_{C_1} y(0) + y(0)dy + 0 = 0$$

บน $\boldsymbol{C_2: y = 2, z = 1 - x^2, dy = 0, dz = -2xdx}$ ดังนั้น

$$\int_{C_2} 2xdx + 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2xdx) = \int_1^0 (2x + 2x^4 - 2x^2)dx = -\frac{11}{15}$$

บน $\boldsymbol{C_3: x = 0, z = 1, dx = 0, dz = 0}$ ดังนั้น

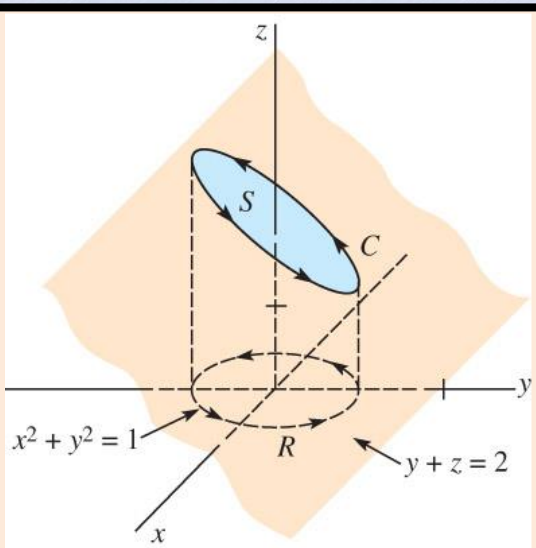
$$\int_{C_3} 0 + ydy + 0 = \int_2^{-2} ydy = 0$$

บน $\boldsymbol{C_4: y = -2, z = 1 - x^2, dy = 0, dz = -2xdx}$ ดังนั้น

$$\int_{C_4} -2xdx - 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2xdx) = \int_0^1 (-2x + 2x^4 - 2x^2)dx = -\frac{19}{15}$$

ดังนั้น$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = -\frac{11}{15} - \frac{19}{15} = -2$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\oint_C \; zdx + xdy + ydz$ โดยที่ C คือเส้นทางของทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ในระนาบ $y + z = 2$ ถ้า C วนรอบในทิศทวนเข็มนาฬิกา



จากโจทย์ $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ ดังนั้น เราสามารถหา $\nabla \times \mathbf{F}$ ได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

จากทิศทางการวนรอบ C สอดคล้องกับผิวด้านบนของ surface S และเรารู้ว่า $g(x, y, z) = y + z - 2 = 0$ เป็นระนาบ ดังนั้นเว็คเตอร์หน่วยทิศพุ่งขึ้น คือ

$$\mathrm{n} = \frac{\nabla \mathrm{g}}{\|\nabla \mathrm{g}\|} = \frac{\mathrm{j+k}}{\sqrt{2}}$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\mathrm{curl}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S (\mathrm{i + j + k}).\left(\frac{\mathrm{j + k}}{\sqrt{2}}\right)\, dS$$

$$= \sqrt{2} \iint_S dS = \sqrt{2} \iint_R \sqrt{2}\, dA = 2\pi$$

```
clear
syms x y z t r
F = [z,x,y]
boundary = [r*cos(t),r*sin(t),2-r*sin(t)]
ndS=cross(diff(boundary,r),diff(boundary,t))
curlF=curl(F,[x,y,z])
sol = int(int(dot(curlF,ndS),r,0,1),t,0,2*pi)
```

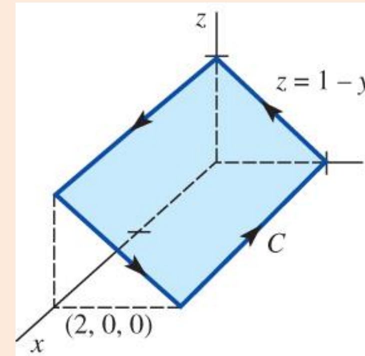
ตัวอย่าง จงใช้ Stokes' theorem หาค่า $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ C วนในทิศทวนเข็มนาฬิกา

$\mathbf{F} = z^2 y\cos xy\,\mathbf{i} + z^2 x(1+\cos xy)\mathbf{j} + 2z\sin xy\,\mathbf{k}$ โดย C มีขอบเขตเป็น ระนาบ $\mathbf{z = 1 - y}$

curl $\mathbf{F} = -2xz\mathbf{i} + z^2\mathbf{k}$. A unit vector normal to the plane is $\mathbf{n} = (\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{2}$. From $z = 1-y$, we have $z_x = 0$ and $z_y = -1$. Thus, $dS = \sqrt{1+1}\,dA = \sqrt{2}\,dA$ and

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R \frac{1}{\sqrt{2}} z^2\sqrt{2}\,dA = \iint_R (1-y)^2\,dA$$

$$= \int_0^2\int_0^1 (1-y)^2\,dy\,dx = \int_0^2 -\frac{1}{3}(1-y)^3\Big|_0^1\,dx = \int_0^2 \frac{1}{3}\,dx = \frac{2}{3}.$$



$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0+0+0+\oint_{C_4} 2z^2(1+\cos 2y)dy + 2z\sin 2y\,dz$$

$$= \int_0^1 2(1-y)^2(1+\cos 2y)dy - 2(1-y)\sin 2y\,dy = \int_0^1 2(1-y)^2(1+\cos 2y)dy - 2(1-y)\sin 2y\,dy = \frac{2}{3}$$

```
clear
syms x y z
F = [y*z^2*cos(x*y),x*z^2+x*z^2*cos(x*y),2*z*sin(x*y)]
boundary = [x,y,1-y]
ndS=cross(diff(boundary,x),diff(boundary,y))
curlF=curl(F,[x,y,z])
sol = int(int(subs(dot(ndS,curlF),boundary),y,0,1),x,0,2)
sol = sol(3)
```

<u>ตัวอย่าง</u> จงใช้ทฤษฎีสโตกส์ หาค่า $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ สมมุติว่า S มีทิศพุ่งขึ้น $\mathbf{F} = 2xy^2z\,\mathbf{i} + 2x^2yz\,\mathbf{j} + (x^2y^2 - 6x)\mathbf{k}$ โดย S เป็นส่วนของระนาบ $\mathbf{z} = \boldsymbol{y}$ ซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอกที่มีฐานเป็นสมการวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} 2xy^2z\, d\mathbf{x} + 2x^2yz\, d\mathbf{y} + (x^2y^2 - 6x)\, d\mathbf{z}$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\cos t \sin^3 t \sin t \; dt + 2\cos^2 t \sin^2 t \cos t\, dt + (\cos^2 t \sin^2 t$$

$$- 6\cos t) \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} (-2\cos t \sin^4 t + 3\cos^3 t \sin^2 t - 6\cos^2 t)\, dt = -6\pi$$

```
clear
syms x y z r t
F = [2*x*y^2*z,2*x^2*y*z,x^2*y^2-6*x]
boundary = [r*cos(t),r*sin(t),r*sin(t)]
ndS=cross(diff(boundary,r),diff(boundary,t))
curlF=curl(F,[x,y,z])
sol = int(int(subs(dot(ndS,curlF),boundary),r,0,1),t,0,2*pi)
sol = sol(3)
```

ทฤษฎีของสโตกส์ (Stokes' Theorem)

Use Stokes' theorem to evaluate $\oint_C z^2 e^{x^2} dx + xy^2\, dy + \tan^{-1} y\, dz$ where C is the circle $x^2 + y^2 = 9$, by finding a surface S with C as its boundary and such that the orientation of C is counterclockwise as viewed from above.

We take the surface to be $z = 0$. Then $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ and $dS = dA$.

Since $\text{curl } \mathbf{F} = \dfrac{1}{1+y^2}\mathbf{i} + 2ze^{x^2}\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$,

$$\oint_C z^2 e^{x^2}\, dx + xy\, dy + \tan^{-1} y\, dz = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S y^2\, dS = \iint_R y^2\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \sin^2\theta\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^4 \sin^2\theta \bigg|_0^3 d\theta$$

$$= \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{81\pi}{4}.$$

HW

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2yz\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$,
S is the part of the paraboloid $z = 5 - x^2 - y^2$ that lies above the plane $z = 1$, oriented upward

19. A particle moves along line segments from the origin to the points $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$, and back to the origin

under the influence of the force field

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + 4y^2\,\mathbf{k}$$

Find the work done.

อินทิกรัลสามชั้น (Triple Integrals)

- การประยุกต์ใช้งานการอินทิกรัลสามชั้น
  - หาปริมาตรของรูปทรงตัน (Volume of solids)
  - หามวลของรูปทรงตัน (Mass of solids)
  - หาโมเมนลำดับหนึ่งและสอง(โมเมนความเฉื่อย) ของรูปทรงตัน (First and second moments of solids)
  - หาโคออดิเนทจุดศูนย์กลางมวล (Coordinates of center of mass)
  - หาจุดเซนทรอยด์ของรูปทรงตัน (Centroid of solids)

Definition 9.15.1 The Triple Integral

ให้ F เป็นฟังก์ชันของ 3 ตัวแปรที่ถูกกำหนดให้อยู่เหนือบริเวณปิด D ใน3มิติ ดังนั้น อินทิกรัลสามชั้นของ F เหนือบริเวณ D มีค่าเท่ากับ

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta V_k. \tag{1}$$

Applications A list of some of the standard applications of the triple integral follows:

Volume: If $F(x, y, z) = 1$, then the **volume** of the solid D is

$$V = \iiint_D dV.$$

Mass: If $\rho(x, y, z)$ is density, then the **mass** of the solid D is given by

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV.$$

First Moments: The **first moments** of the solid about the coordinate planes indicated by the subscripts are given by

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dV, \qquad M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dV, \qquad M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV.$$

Center of Mass: The coordinates of the **center of mass** of D are given by

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Centroid: If $\rho(x, y, z) =$ a constant, the center of mass is called the **centroid** of the solid.

Second Moments: The **second moments**, or **moments of inertia** of D about the coordinate axes indicated by the subscripts, are given by

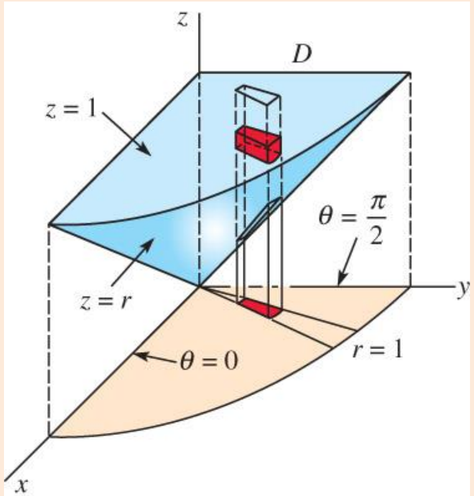
$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

Radius of Gyration: As in Section 9.10, if I is a moment of inertia of the solid about a given axis, then the **radius of gyration** is

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

Center of Mass (Application)

<u>ตัวอย่าง</u> รูปทรงอยู่ในออกแตนท์ที่ 1 และถูกจำกัดขอบเขตด้วยกราฟทรงกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ระนาบ $z = 1$, $x = 0$ และ $y = 0$ จงหาจุดศูนย์กลางมวล ถ้าความหนาแน่นของรูปทรงดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $\rho(r, \theta, z) = r$



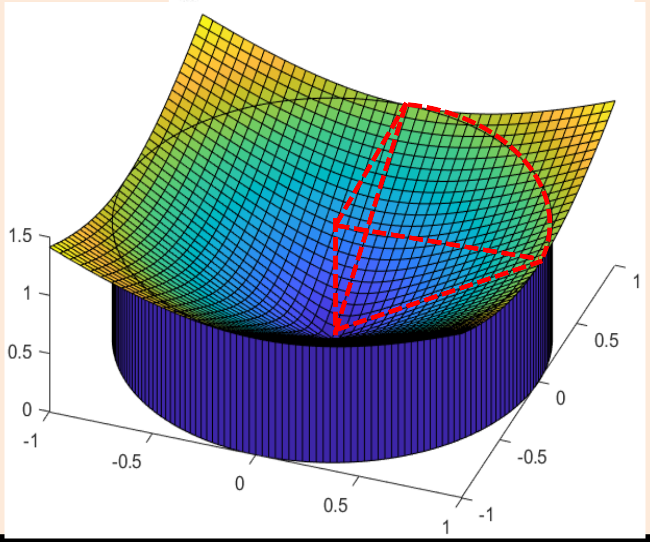
จากโจทย์ สมการของกรวยคือ $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ ดังนั้นจากรูป

$$m = \iiint_D r dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_r^1 r\,(dz\, r dr d\theta)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [r^2 z]_r^1 dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2 - r^3) dr d\theta$$

$$= \frac{\pi}{24}$$

```
clear
syms x y z r t
answer = int(int(int(r^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```



Center of Mass (Application)

First Moments: The first moments of the solid

$$M_{xy} = \iiint_D zr\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 zr^2\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{z^2}{2}r^2\Big]_r^1\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2 - r^4)\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{30}.$$

$$M_{xz} = \iiint_D r^2\sin\theta\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 z\sin\theta\Big]_r^1\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^3 - r^4)\sin\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{20}$$

$$M_{yz} = \iiint_D r^2\cos\theta\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta = \frac{1}{20}.$$

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{xz} = \iiint_D y\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x,y,z)\,dV$$

```
clear
syms x y z r t
Mxy = int(int(int(z*r^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
Mxz = int(int(int(sin(t)*r^3,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
Myz = int(int(int(cos(t)*r^3,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```

Hence,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi/30}{\pi/24} \approx 0.8$$

The center of mass has the approximate coordinates (0.38, 0.38, 0.8).

Center of Mass (Application)

Second moments, or Moments of Inertia

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

$$I_x = \iiint_D (r^2 \sin^2\theta + z^2) r^2 dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 (r^4 \sin^2\theta + r^2 z^2) dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(z r^4 \sin^2\theta + \frac{r^2 z^3}{3}\right)\Bigg]_r^1 dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left\{(r^4 - r^5)\sin^2\theta + \left(\frac{r^2}{3} - \frac{r^5}{3}\right)\right\} dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6}\right)\sin^2\theta + \left(\frac{r^3}{9} - \frac{r^6}{18}\right)\right)\Bigg]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{1}{30}\right)\sin^2\theta + \frac{1}{18}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) + \frac{1}{18}\right) d\theta = \left(\left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right) + \frac{\theta}{18}\right)\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{120} + \frac{\pi}{36} = \frac{13\pi}{360}$$

```
clear
syms x y z r t
Ix = int(int(int(r^4*sin(t)^2+r^2*z^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```

Center of Mass (Application)

Second moments, or Moments of Inertia

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

$$I_y = \iiint_D (r^2\cos^2\theta + z^2) r^2\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 (r^4\cos^2\theta + r^2 z^2)\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(z r^4\cos^2\theta + \frac{r^2 z^3}{3}\right)\Big]_r^1 dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left\{(r^4 - r^5)\cos^2\theta + \left(\frac{r^2}{3} - \frac{r^5}{3}\right)\right\} dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{r^3}{9} - \frac{r^6}{18}\right)\right)\Big]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{1}{30}\right)\cos^2\theta + \frac{1}{18}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \frac{1}{18}\right) d\theta = \left(\left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right) + \frac{\theta}{18}\right)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{120} + \frac{\pi}{36} = \frac{13\pi}{360}$$

```
clear
syms x y z r t
Iy = int(int(int(r^4*cos(t)^2+r^2*z^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```

Center of Mass (Application)

Second moments, or Moments of Inertia

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

$$I_z = \iiint_D (r^2 \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta) r^2 dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^4 dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (zr^4)]_r^1\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^4 - r^5)\, dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6}\right)\Big]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{30} d\theta = \frac{\pi}{60}$$

```
clear
syms x y z r t
Iz = int(int(int((r^2*cos(t)^2+r^2*sin(t)^2)*r^2,z,r,1),r,0,1),t,0,pi/2)
```

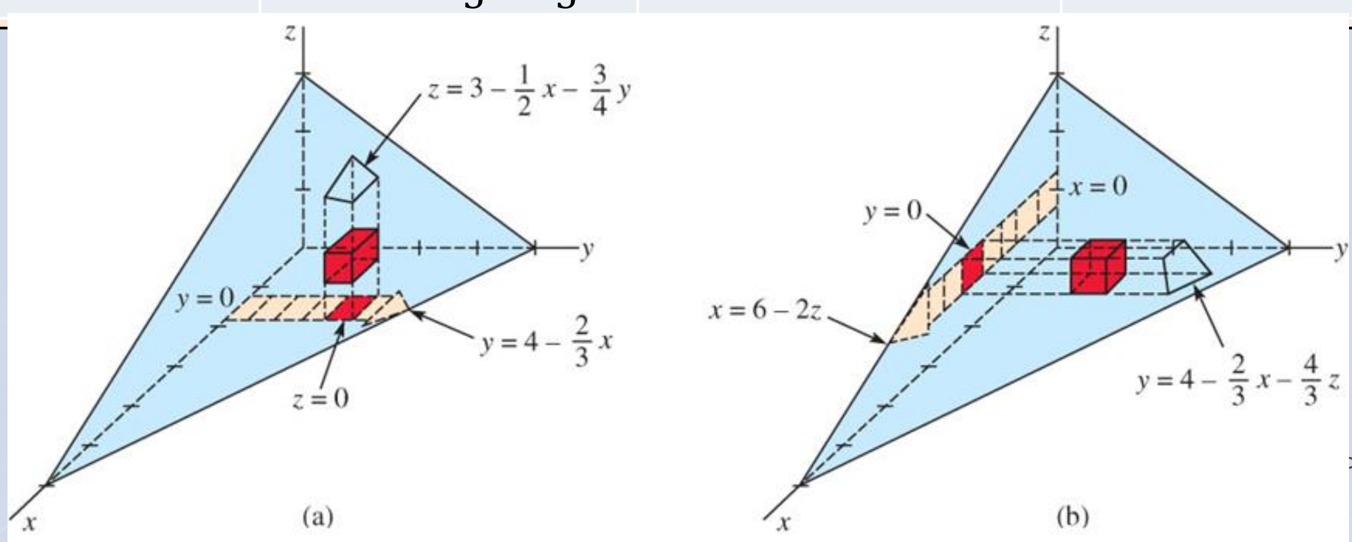
การเปลี่ยนลำดับของการอินทิกรัล

$$\int_0^6 \int_0^{(4-\frac{2x}{3})} \int_0^{(3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4})} F(x,y,z)dzdydx \quad \Rightarrow \quad dydxdz$$

ตามรูปด้านล่าง บริเวณ D เป็นส่วนที่อยู่ในออกแตนท์ที่ 1 ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยระนาบของโคออดิเนททั้งหมด 3 ระนาบ และระนาบสุดท้ายคือ $2x + 3y + 4z = 12$ จากรูป (b) และ ตารางสรุปได้ว่า

$$\int_0^6 \int_0^{(4-\frac{2x}{3})} \int_0^{(3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4})} F(x,y,z)dzdydx = \int_0^3 \int_0^{(6-2z)} \int_0^{(4-\frac{2x}{3}-\frac{4z}{3})} F(x,y,z)\, dydx\, dz$$

Order of Integration	First Integration	Second Integration	Third Integration
$dzdydx$	0 ถึง $3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}$	0 ถึง $4-\frac{2x}{3}$	0 ถึง 6
$dydxdz$	0 ถึง $4-\frac{2x}{3}-\frac{4z}{3}$	0 ถึง $6-2z$	0 ถึง 3



(a) (b)

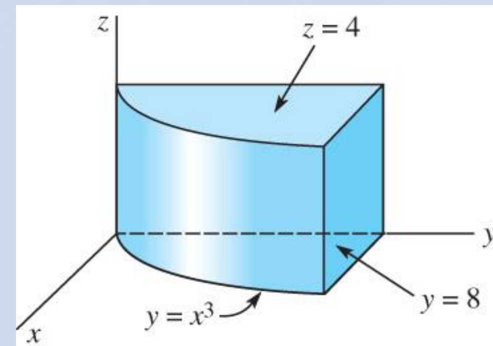
ตัวอย่าง จงแสดงการหา ลำดับของการอินทิกรัลปริมาตรของรูปที่กำหนดให้

$$\iiint_V dz\,dy\,dx = \int_0^2\int_{x^3}^8\int_0^4 dz\,dy\,dx = 48$$

$$\iiint_V dx\,dz\,dy = \int_0^8\int_0^4\int_0^{y^{\frac{1}{3}}} dx\,dz\,dy = 48$$

$$\iiint_V dy\,dx\,dz = \int_0^4\int_0^2\int_{x^3}^8 dy\,dx\,dz = 48$$

```
clear
syms x y z
answer1 = int(int(int(1,z,0,4),y,x^3,8),x,0,2)
answer2 = int(int(int(1,x,0,y^(1/3)),z,0,4),y,0,8)
answer3 = int(int(int(1,y,x^3,8),x,0,2),z,0,4)
```



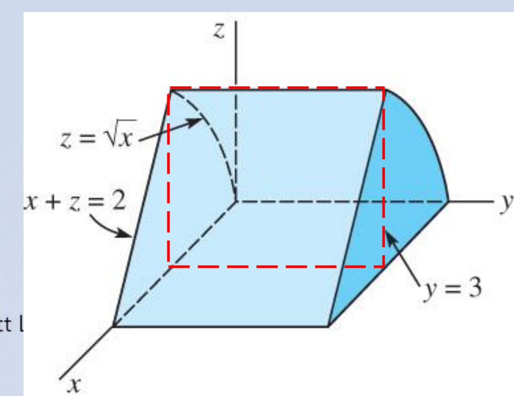
$$\iiint_V dx\,dz\,dy = \int_0^3\int_0^1\int_{z^2}^{2-z} dx\,dz\,dy = \frac{21}{6}$$

$$\iiint_V dy\,dx\,dz = \int_0^1\int_{z^2}^{2-z}\int_0^3 dy\,dx\,dz = \frac{21}{6}$$

$$\iiint_V dz\,dx\,dy = \int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} dz\,dx\,dy + \int_0^3\int_1^2\int_0^{2-x} dz\,dx\,dy = \frac{21}{6}$$

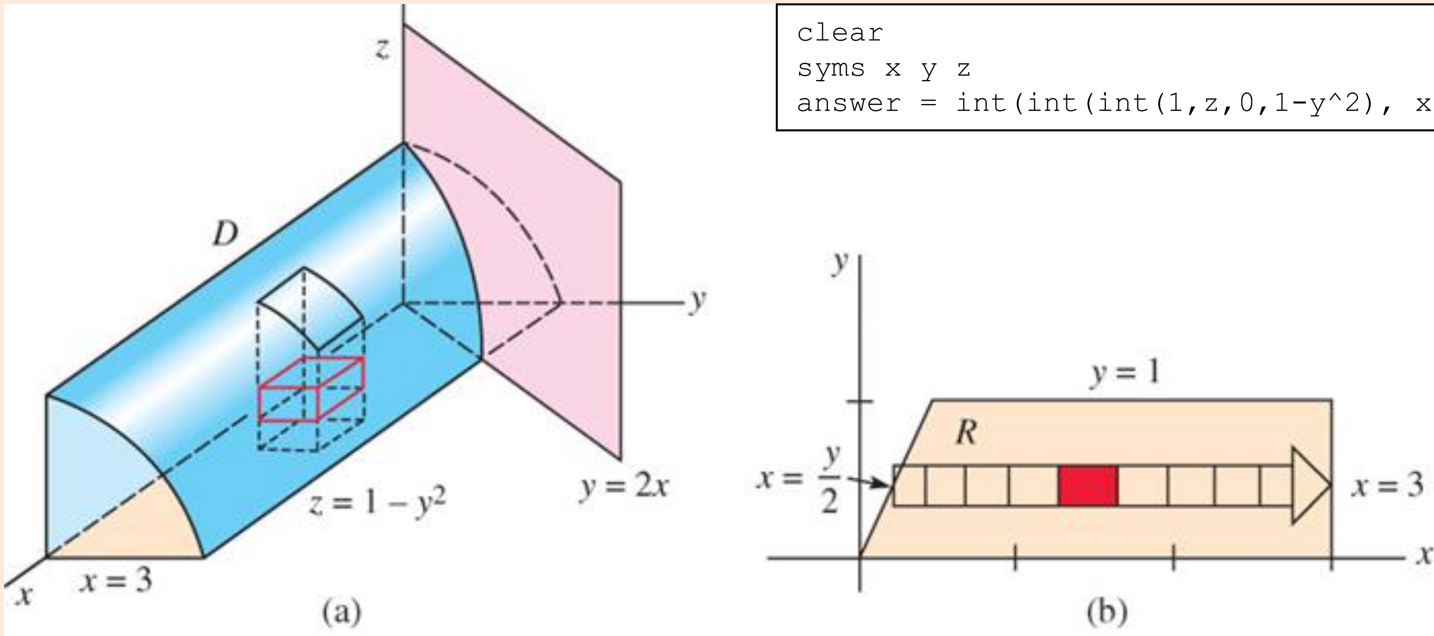
```
clear
syms x y z
answer1 = int(int(int(1,x,z^2,2-z),z,0,1),y,0,3)
answer2 = int(int(int(1,y,0,3),x,z^2,2-z),z,0,1)
answer3 = int(int(int(1,z,0,x^0.5),x,0,1),y,0,3)+...
    int(int(int(1,z,0,2-x),x,1,2),y,0,3)
```

es & Bartlett



<u>ตัวอย่าง</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงที่อยู่ในออกแตนท์ที่ 1 ซึ่งถูกจำกัดขอบเขตด้วย $z = 1 - y^2, y = 2x,$ และ $x = 3$

```
clear
syms x y z
answer = int(int(int(1,z,0,1-y^2), x,  y/2,3),y,0,1)
```



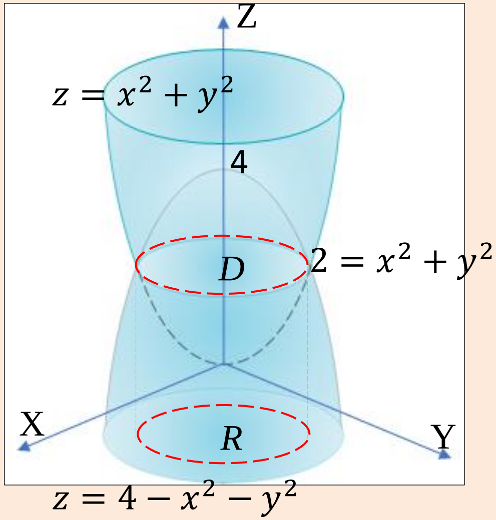
ระนาบ xy ในรูป คือบริเวณของ Type II ดังนั้น เราอินทิกรัลเทียบกับ x จาก $\frac{y}{2}$ ถึง 3 ในส่วนการอินทิกรัลขั้นสุดท้ายเทียบกับ y จาก 0 ถึง 1 ดังนั้น

$$V = \iiint_D dV = \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^3 \int_0^{(1-y^2)} dz\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^3 (1-y^2)dx\,dy = \int_0^1 [x - xy^2\,]_{y/2}^{3} dy$$

$$= \int_0^1 (3 - 3y^2 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{2})dy = \left[3y - y^3 - \frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{8}\right]_0^1 = 3 - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาปริมาตรที่เกิดจากการตัดกันของพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ และ $z = 4 - x^2 - y^2$

1. อินทิกรัลทั่วบริเวณ D, ลำดับแรกเราอินทิกรัลเทียบกับ z ดังนั้น
2. ให้ x และ y อยู่คงที่, เพิ่มค่า z เราจะได้เส้นตามแนวตั้ง
3. ใส่ค่าลิมิตของการอินทิกรัลที่เหลือ (ใน xy-coordinates หรือ polar coordinates) ดังนั้นคือการรวมทุกเส้นในแนวตั้งที่ตัดกับบริเวณ D. นั่นหมายความว่าคุณทำ double integral ทั่วบริเวณ R ในระนาบ xy (โดยที่ D ถูกฉายลงมาบนระนาบ xy)



$$V = \iiint_D dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$$

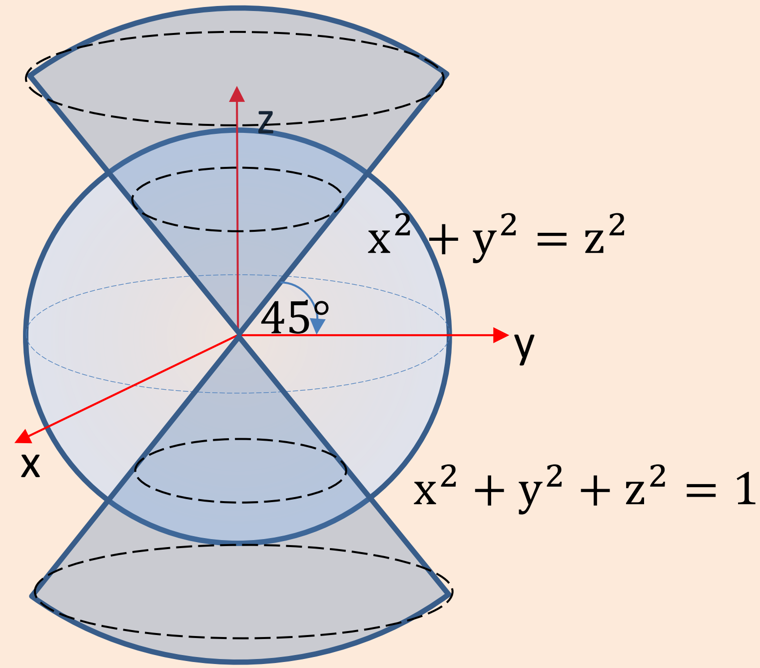
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{4-r^2} dz\,r dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [z]_{r^2}^{4-r^2}\, r dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2r^2)\,r dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = 4\pi$$

```
clear
syms x y z
answer = int(int(int(1,...
    z,x^2+y^2,4-x^2-y^2),...
    x,-sqrt(2-y^2),sqrt(2-y^2)),...
    y,-sqrt(2),sqrt(2))
```

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาปริมาตรที่อยู่ภายใน $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ แต่อยู่ภายนอกทรงกรวย $x^2 + y^2 = z^2$

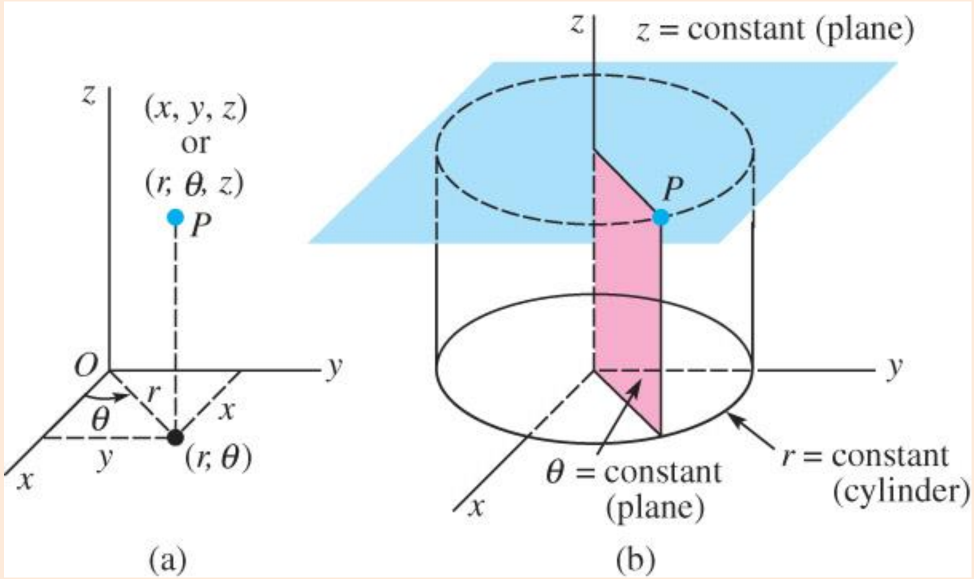
$$V = \iiint_D dV$$




```
clear
syms rho phi theta
answer = 2*int(int(int(rho^2*sin(phi),rho,0,1),phi,pi/4,pi/2),theta,0,2*pi)
```

พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinates)

Cylindrical coordinate system เป็นการรวม พิกัดขั้ว (polar) ของจุดบนระนาบ xy กับพิกัดฉากเฉพาะแกน z ดังแสดงในรูป พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate)ของจุด P ถูกแสดงโดย (r, θ, z)



<u>การแปลงพิกัดทรงกระบอก ⟹พิกัดฉาก</u>

จากรูปด้านบน พิกัดฉาก (x, y, z) ของจุด P สามารถหาได้จากพิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) โดย

$$\boxed{x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\,,\ z = z}$$

<u>การแปลงพิกัดฉาก ⟹พิกัดทรงกระบอก</u>

พิกัดฉาก (x, y, z) แปลงไปเป็น พิกัดทรงกระบอก $(r, \theta, z))$ โดย

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}\ \ , z = z}$$

พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinates)

<u>ตัวอย่าง</u>

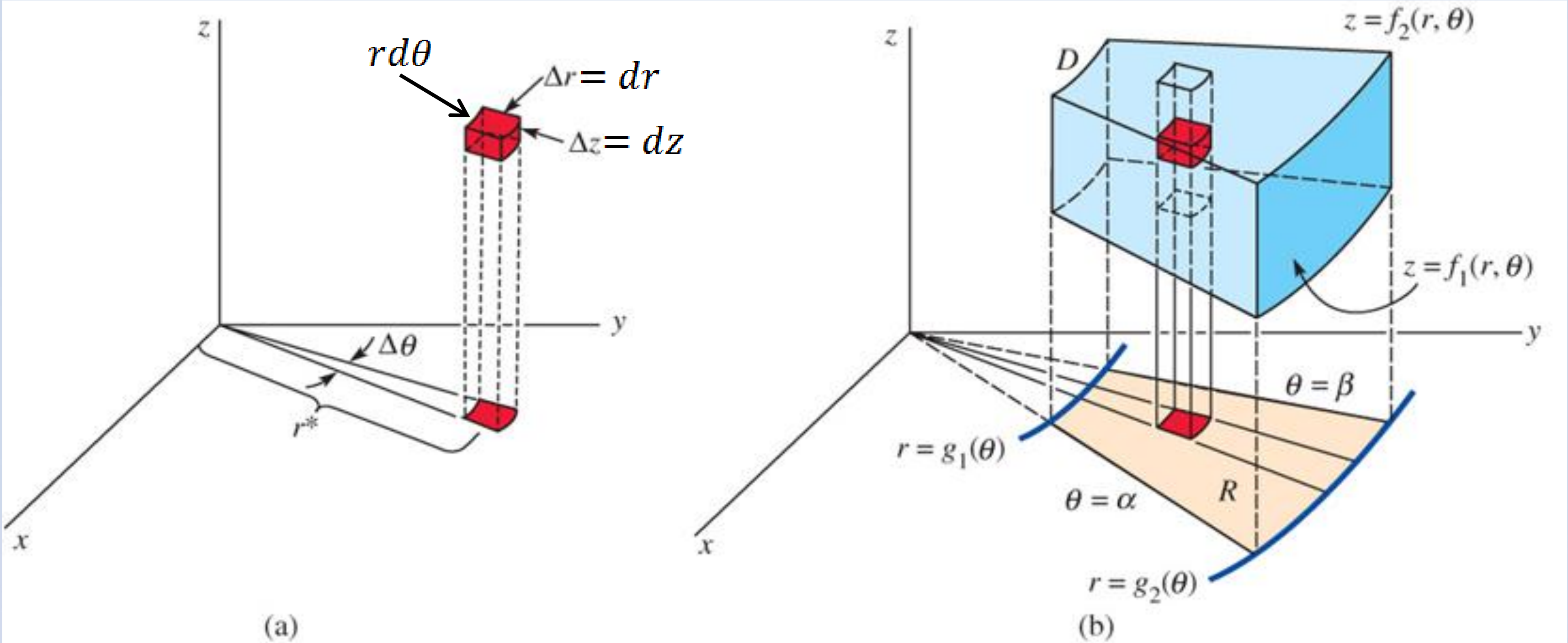
จงแปลง $\left(8, \frac{\pi}{3}, 7\right) = (r, \theta, z)$ พิกัดทรงกระบอก $\Longrightarrow (x, y, z)$ พิกัดฉาก

ดังนั้น $(8, \frac{\pi}{3}, 7) \Longrightarrow (\underbrace{4}_{rcos\theta}, \underbrace{4\sqrt{3}}_{rsin\theta}, \underbrace{7}_{z})$ ในพิกัดฉาก

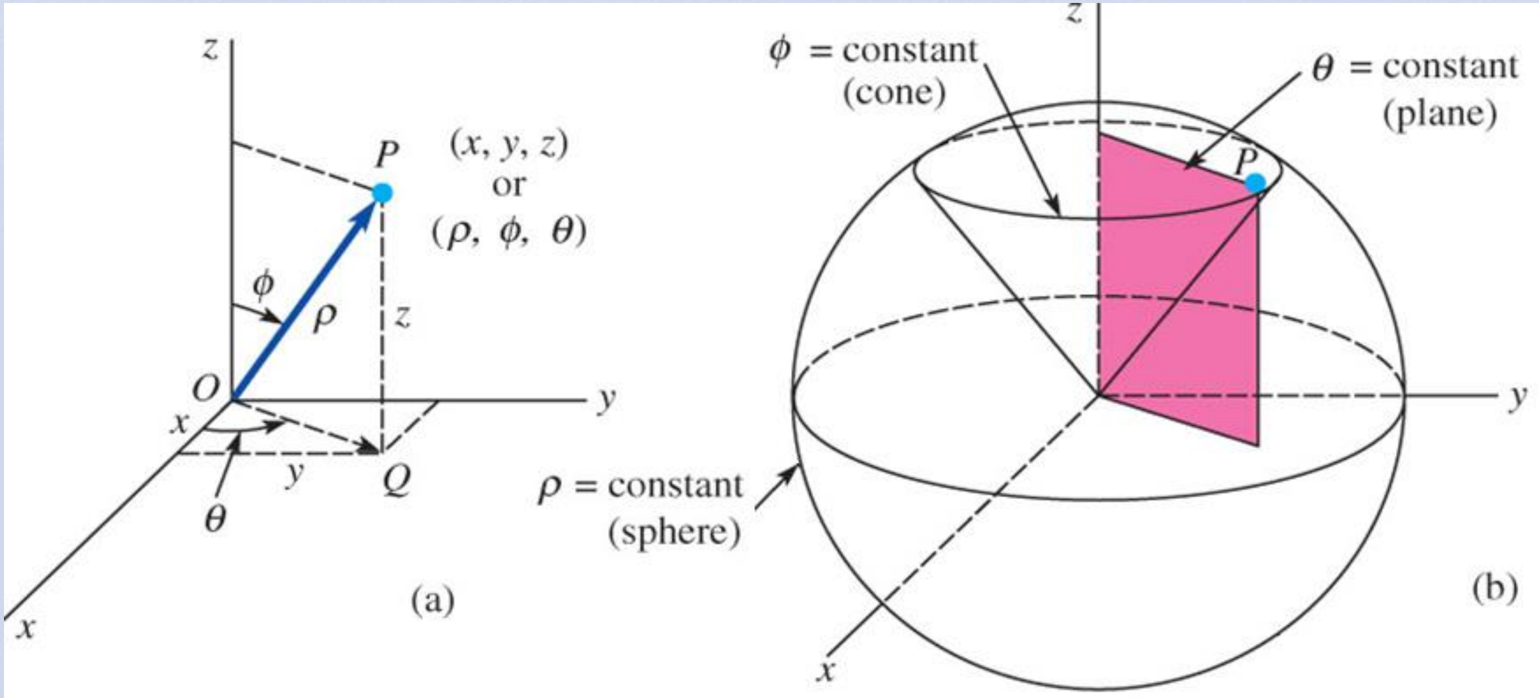
อินทิกรัลสามชั้นในพิกัดทรงกระบอก

(Triple Integrals Cylindrical Coordinates)

$$\iiint_D F(r,\theta,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r,\theta,z)dz \right) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r,\theta,z) r dz dr d\theta$$



พิกัดทรงกลม (Spherical Coordinates)



<u>การแปลงพิกัดทรงกลม ⟹พิกัดฉาก</u>

พิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) แปลงไปเป็น พิกัดฉาก (x, y, z) โดย

$x = \|\overrightarrow{OQ}\| \cos\theta$, $y = \|\overrightarrow{OQ}\| \sin\theta$, $z = \|\overrightarrow{OP}\| \cos\phi$ และจากรูป $\|\overrightarrow{OQ}\| = \rho \sin\phi$

$$\boxed{x = \rho \sin\phi \cos\theta \, , y = \rho \sin\phi \sin\theta \, , z = \rho \cos\phi}$$

<u>การแปลงพิกัดทรงกลม ⟹พิกัดทรงกระบอก</u>

พิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) แปลงไปเป็น พิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) โดย

$$r = \rho \sin\phi \, , \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho \cos\phi$$

การแปลงพิกัด (Converting Coordinates)

ตัวอย่าง

จงแปลง $(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) = (\rho, \phi, \theta)$ พิกัดทรงกลม $\Longrightarrow$ พิกัดฉาก (x, y, z)
และ พิกัดทรงกลม $\Longrightarrow$ พิกัดทรงกระบอก (r, θ, z)

$$\rho = 6, \phi = \frac{\pi}{4}, \text{ และ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

ดังนั้น $(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \Longrightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2}, 3\sqrt{2}\right)$ ในพิกัดฉาก

$(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \Longrightarrow (3\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, 3\sqrt{2})$ ในพิกัดทรงกระบอก

การแปลงพิกัด (Converting Coordinates)

การแปลงพิกัดฉาก ⟹พิกัดทรงกลม

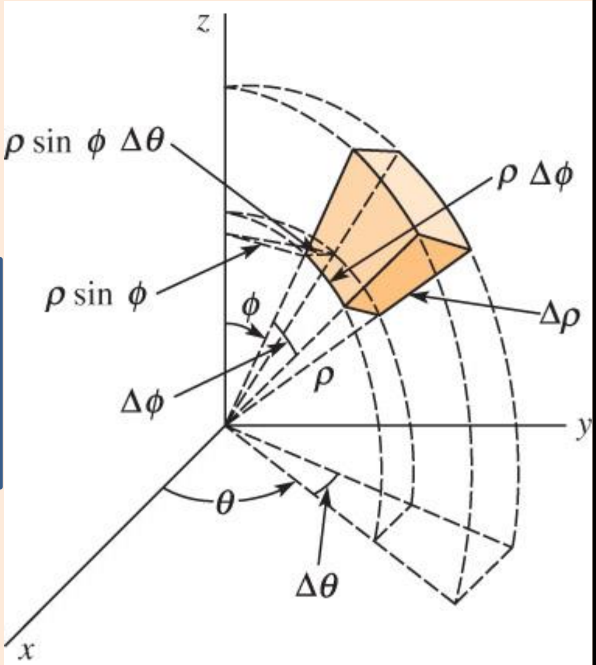
พิกัดพิกัดฉาก (x, y, z) แปลงไปเป็นทรงกลม (ρ, ϕ, θ) โดย

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \phi = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

การอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม (Triple Integrals in Spherical Coordinates)

จากรูป ปริมาตรรูปลิ่มในระบบพิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) ประมาณค่าได้เป็น

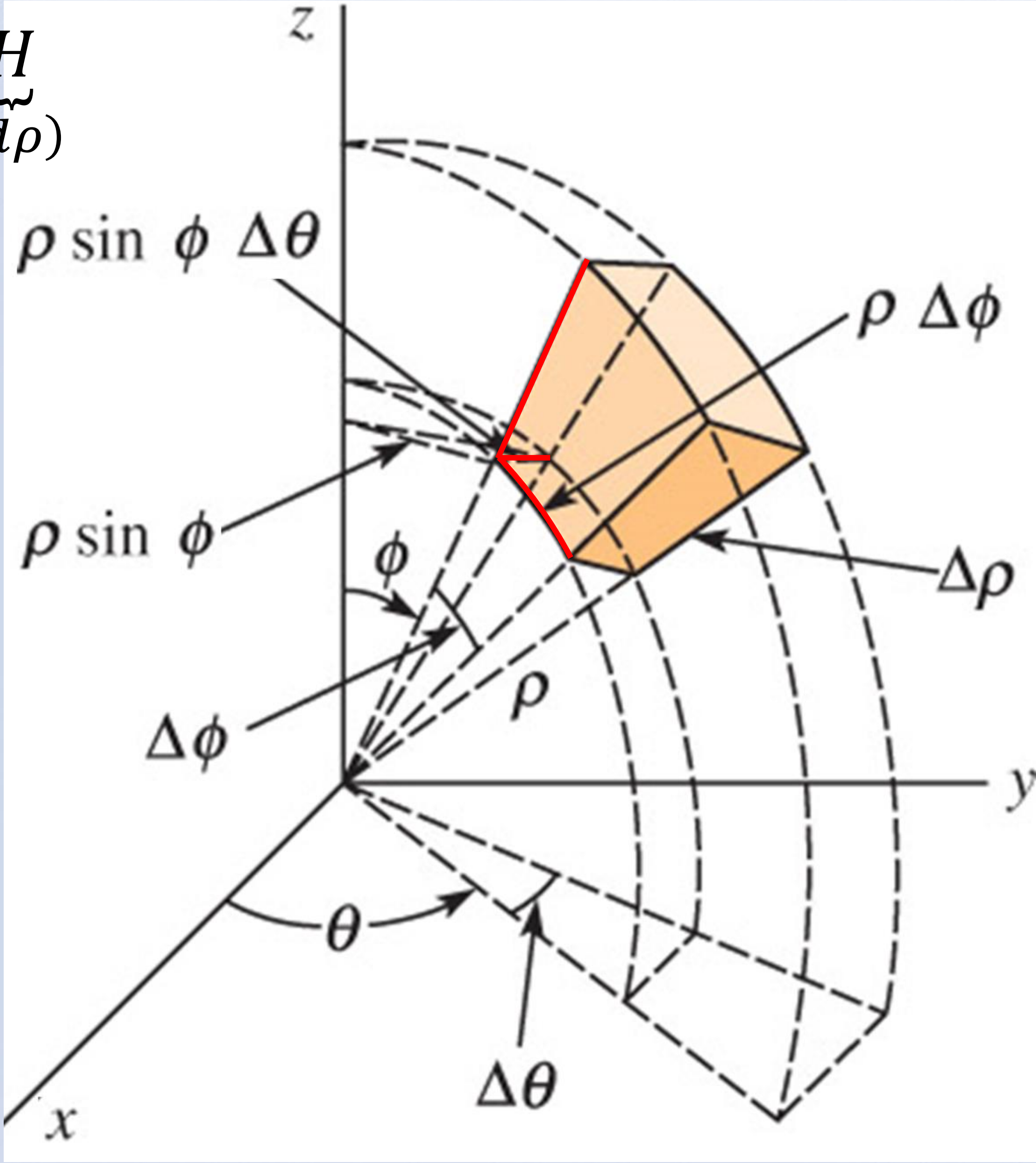
$$dV = W \times L \times H = d\rho \times \rho d\phi \times \rho \sin\phi \, d\theta = \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$$



โดยทั่วไป การอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม จะอยู่ในรูป

$$\iiint_D F(\rho, \phi, \theta) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(\phi,\theta)}^{f_2(\phi,\theta)} F(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$$

$$dV = \underbrace{W}_{(\rho d\phi)} \times \underbrace{L}_{(\rho \sin\phi d\theta)} \times \underbrace{H}_{(d\rho)}$$



Ex. Volume of Sphere with Radius **R**

```
clear
syms rho phi theta R
answer =
int(int(int(rho^2*sin(phi),rho,0,R),
phi,0,pi),theta,0,2*pi)
```